This material is restricted in use and cannot be quoted by ... propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 23 | Dezember 1943 | Heft 6

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. W. Müller: Über die Berechnung der Kräfte an einem in der reibungslosen Flüssigkeit beschleunigt bewegten Tragflügel . . 305

H. Neuber: Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration 321

Seite

H. Karl: Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre 331

H. Blume: Über die Analyse kurzer Kurvenzüge . 346

Kleine Mitteilungen. K. Ludwig: Das Aufheizen einer Wand durch konstante Wärmestromdichten 358

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Berechnung der Kräfte an einem in der reibungslosen Flüssigkeit beschleunigt bewegten Tragflügel.

Von *Wilhelm Müller* in München.

Die Arbeit bringt eine Anwendung einiger allgemeinen, vom Verfasser aufgestellten Beziehungen für die Kräfte an einem in der reibungslosen Flüssigkeit bewegten Körper auf die beschleunigte Bewegung eines Joukowskischen Tragflügels. Es werden Formeln für den Einfluß der verschiedenen Beschleunigungsarten, sowie der Drehung und Drehungsschwingung auf die Kraftwirkung angegeben. Die Rechnung besteht im wesentlichen in der Auswertung von komplexen Oberflächen, bzw. Randintegralen nach funktionentheoretischen Methoden.

1. Das allgemeine Formelsystem.

In einer größeren Arbeit[1]) habe ich mehrere Formeln aufgestellt für die Kräfte an einem in der reibungslosen Flüssigkeit mit beliebiger Beschleunigung bewegten Körper. Bezeichnen wir die absolute Feldgeschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$, die Translationsgeschwindigkeit mit $\mathfrak{v}_0$, den Vektor der Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung um eine im Körper C feste Drehachse mit $\overline{\omega}$, entsprechend der Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u} = \overline{\omega} \times \mathfrak{r}$, ferner mit Φ das Potential der im Raumgebiet T außerhalb C als wirbelfrei vorausgesetzten Strömung, so gewinnen wir für die resultierende Druckkraft den allgemeinen Ausdruck

$$\mathfrak{P}_C = \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_C \Phi \, \mathfrak{n} \, df + \varrho \, \mathfrak{v}_0 \times \int_C \mathfrak{v} \times \mathfrak{n} \, df + \varrho \int_C \mathfrak{u} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{n} \, df) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wobei die Integrale über die Oberfläche des Körpers C zu erstrecken sind und $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der äußeren Normalen bezeichnet. Die beiden letzten Integrale können auch so umgeformt werden, daß die im Innern, bzw. am Rande zu denkenden „erzeugenden" Wirbel bzw. die entsprechenden Zirkulationsgrößen auftreten. Wir erhalten dann z. B.

$$\mathfrak{P}_C = \varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\omega} \times \right) \int_C \Phi \, \mathfrak{n} \, df - \varrho \, \mathfrak{v}_0 \times \int_{T_0} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \, d\tau - \varrho \int_{T_0} \mathfrak{u} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} \, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wo jetzt die letzten Integrale über das Raumgebiet T_0 im Innern des Körpers zu erstrecken sind.

[1]) Wilhelm Müller: Zur Theorie der Kräfte bei der beschleunigten Bewegung eines Körpers in der reibungslosen Flüssigkeit, Ing.-Arch. Bd. XIV (1944), S. 332 bis 350. An dieser Stelle ist auch die Literatur ziemlich vollständig angegeben worden.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

XUM

Wenn $\overline{\omega}$ und rot $\mathfrak{v}$ gleichgerichtet sind wie im ebenen Fall, so wird

$$\mathfrak{u} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \overline{\omega} \times (\mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}).$$

Bezeichnen wir ferner die resultierende gerichtete Zirkulation mit $\mathfrak{k}\Gamma$ und den Ortsvektor des sog. „Schwerpunktes der Zirkulation" mit $\mathfrak{r}_0$, so können wir schreiben

$$\int_{T_0} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \mathrm{d}\tau = \mathfrak{k}\Gamma; \qquad \int_{T_0} \mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \mathrm{d}\tau = \mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{k}\Gamma.$$

Damit erhalten wir dann z. B. im stationären Fall ohne Drehung den bekannten Ausdruck für die Magnus- bzw. Auftriebskraft

$$\mathfrak{P}_C = -\varrho\, \mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{k}\Gamma.$$

In derselben Weise ergibt sich das Moment der Kräfte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_C &= \varrho \int \mathfrak{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}f + \varrho \int_C \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_0 \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{n}\, \mathrm{d}f)] + \varrho \int_C \mathfrak{r} \times [\mathfrak{u} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{u}\, \mathrm{d}f)] \\ &= \varrho \int_C \mathfrak{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}f + \varrho\, \overline{\omega} \times \int_C \mathfrak{r} \times \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}f + \varrho\, \mathfrak{v}_0 \times \int \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}f \\ &\quad - \varrho \int_{T_0} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v}_0 \times \operatorname{rot} \mathfrak{v})\, \mathrm{d}\tau - \varrho \int_{T_0} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{u} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v})\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Im ebenen Fall, wo $\overline{\omega}$ auf $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{r}$ senkrecht steht, verschwindet der zweite und letzte Ausdruck, und wir erhalten die vereinfachte Formel

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_C &= \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{r} \times \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s + \varrho\, \mathfrak{v}_0 \times \int \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s - \varrho \int \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v}_0 \times \operatorname{rot} \mathfrak{v})\, \mathrm{d}\tau \\ &= \varrho \int \mathfrak{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s + \varrho\, \mathfrak{v}_0 \times \int \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s - \varrho\, \mathfrak{v}_0 \times \int \mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \quad (5),$$

wobei im letzten Integral wieder

$$-\varrho\, \mathfrak{v}_0 \times \int \mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \mathrm{d}\tau = -\varrho\, \mathfrak{v}_0 \times (\mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{k}\Gamma)$$

gesetzt werden kann.

Wie ich gezeigt habe, sind die gegebenen Formeln von so allgemeiner Bedeutung, daß sie sich unmittelbar auf fast alle Sonderfragen, z. B. aus der Theorie des Propellers, der Turbinen, sowie auf die Luftschiff- oder Flugzeugrumpfaerodynamik anwenden lassen. Im folgenden wollen wir uns im besonderen mit dem ebenen Fall beschäftigen und zunächst im Anschluß an die oben angeführte Arbeit, die Ausdrücke für $\mathfrak{P}_C$ und $\mathfrak{M}_C$ mit Benutzung von komplexen Größen so umformen, daß die vorkommenden Integrale mit funktionentheoretischen Methoden unmittelbar ausgewertet werden können.

2. Die komplexe Darstellung im ebenen Fall.

Wir gehen am besten aus von dem im Raumgebiet T enthaltenen Impuls, den wir mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Nach dem Gaußschen Satz ergibt sich, wenn wir die innere Normale u_i nennen,

$$\mathfrak{J} = \varrho \int \mathfrak{v}\, \mathrm{d}t = \varrho \int \Gamma\, \Phi\, \mathrm{d}t = \varrho \int \Phi\, \mathfrak{n}_i\, \mathrm{d}s = -\varrho \int \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s \quad (6).$$

Mit

$$u = \cos(\mathfrak{n}\,x)\, \mathfrak{e}_1 + \sin(\mathfrak{n}\,x)\, \mathfrak{e}_2; \qquad \mathrm{d}s \cos(\mathfrak{n}\,x) = \mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}s \sin(\mathfrak{n}\,x) = -\mathrm{d}x$$

erhalten wir aber bei Einführung von komplexen Größen

$$J = J_x + i\, J_y = i\, \varrho \oint \Phi\, \mathrm{d}z \quad (7).$$

Ebenso wird das Impulsmoment

$$L = \varrho \int \mathfrak{r} \times \Gamma\, \Phi\, \mathrm{d}\tau = -\varrho \int \mathfrak{r} \times \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s = \Re\, \varrho \int \Phi\, \bar{z}\, \mathrm{d}z \quad (8),$$

wenn $\Re$ den Realteil des dahinter stehenden Ausdrucks bedeutet. Mit der Bezeichnung

$$\begin{aligned} v_x + i\, v_y &= w, & v_x - i\, v_y &= \overline{w}, \\ v_{0x} + i\, v_{0y} &= w_0, & v_{0x} - i\, v_{0y} &= \overline{w}_0 \end{aligned}$$

erhalten wir ferner

$$-\mathfrak{v}_0 \times \int \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \mathrm{d}\tau = i\, \varrho\, w_0\, \Gamma, \qquad \mathfrak{v}_0 \times \int \Phi\, \mathfrak{n}\, \mathrm{d}s = \Re\, (i\, \overline{w}_0\, J),$$

$$-\overline{\omega} \times \int \mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \mathrm{d}\tau = -\omega\, z_0\, \Gamma, \qquad -\mathfrak{v}_0 \times (\mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{k}\Gamma) = \Re\, (\overline{w}_0\, z_0\, \Gamma).$$

Im ganzen ergeben sich dann für die Kraft und das Moment die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} P_C &= -\frac{\partial J}{\partial t} - i\,\omega\,J + i\,\varrho\,w_0\,\Gamma - \varrho\,\omega\,z_0\,\Gamma, \\ M_C &= -\frac{\partial L}{\partial t} + \Re\,[i\,\overline{w}_0\,(J - i\,\varrho\,z_0\,\Gamma)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

in Übereinstimmung mit den von Bickley[2]) in direkter Weise abgeleiteten Formeln.

Es läßt sich weiter zeigen, daß man die Impulsgrößen so umformen kann, daß an Stelle der Potentialfunktion Φ das komplexe Potential $\Omega = \Phi + i\,\Psi$ vorkommt. Dabei treten dann noch zusätzliche Größen auf, die von der Querschnittsfläche F des zylindrischen Körpers abhängen. So erhält man z. B. für den translatorischen Impuls

$$J_t = i\,\varrho \oint \Omega_t\,\mathrm{d}\,z - \varrho\,w_0\,F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Wenn man also Φ durch die komplexe Stromfunktion Ω ersetzt, so hat man noch den Impuls der vom Zylinder eingeschlossen gedachten Flüssigkeit, die sich wie ein starrer Körper bewegt, in Abzug zu bringen. Dabei läßt sich die Fläche F wieder durch ein Randintegral ermitteln, wie aus der allgemeinen Formel

$$\int \mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{2}\int \mathrm{div}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}\,\mathrm{d}\,f$$

hervorgeht, die in komplexer Schreibweise für den ebenen Fall in

$$F = \frac{1}{2}\int_C (x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x) = -\frac{i}{2}\,\Re\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}\,z$$

übergeht. Für den rotatorischen Impuls erhalten wir, wenn die Drehung um den Punkt $z = z_0$ erfolgt

$$\left.\begin{aligned} J_r &= i\,\varrho\int_C \Phi_r\,\mathrm{d}\,z = i\,\varrho\int_C \Omega_r\,\mathrm{d}\,z - \frac{1}{2}\,\varrho\,\omega\int_C |z - z_0|^2\,\mathrm{d}\,z \\ &= i\,\varrho\int_C \Omega_r\,\mathrm{d}\,z - i\,\varrho\,\omega\,z_s\,F \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

wobei mit z_s die Relativkoordinate des Schwerpunktes der Fläche F in bezug auf den Punkt z_0 als Drehpunkt bezeichnet ist. Man hat also auch in diesem Fall den Impuls der Kontur eingeschlossen gedachten Flüssigkeit abzuziehen. Die entwickelte Kraftwirkung entspricht der zentrifugal gerichteten Trägheitswirkung dieser Flüssigkeitsmasse, die wie ein starrer Körper rotiert. Bei der Bildung des Momentes kann man das Potential Φ_r für die Drehströmung ohne weiteres durch die Funktion Ω_r ersetzen, weil das Moment der Trägheitskraft verschwindet. Man erhält dann im ganzen, wie man leicht feststellt, den Ausdruck

$$L = \Re\,\varrho\int_C \Omega(z)\,\bar{z}\,\mathrm{d}\,z + \varrho\,(y_s\,v_{0x} - x_s\,v_{0y})\,F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Die Anwendung der Formeln soll nun an dem Beispiel der Bewegung eines Tragflügels näher studiert werden.

3. Berechnung einiger Hilfsgrößen für den Fall des Joukowskischen Tragflügels.

Wenn wir von dem Grundkreis der ζ-Ebene ausgehen, der durch den Punkt $\zeta = -p$ hindurchgeht und dessen Halbmesser $a > p$ angenommen wird, so wird durch die komplexe Transformation

$$z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

der Kreis in ein geschlossenes Joukowskisches Profil übergeführt und gleichzeitig eine konforme Abbildung der Außengebiete von Kreis und Profil in der z- und ζ-Ebene vermittelt, die für die Aufstellung der Strömung um das Profil verwendet werden kann (Bild 1). Als komplexe Koordinate des Kreismittelpunktes nehmen wir

$$\zeta_0 = b\,e^{i\delta}$$

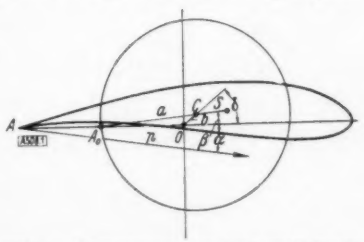


Bild 1. Abmessungen am Joukowski-Profil.

[2]) W. G. Bickley: Phil. Trans. A Bd. 228 (1929), S. 235; Phil. Magaz. Bd. 35 (1918), S. 500; Roy. Soc. Proc. A Bd. 124 (1929), S. 296; Proc. Roy. Soc. A Bd. 127 (1929), S. 186.

an, wobei b im allgemeinen als klein gegen a bzw. p vorausgesetzt wird, so daß gelegentlich die zweiten und höheren Potenzen von $\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{b}{p}$ vernachlässigbar sind. Die Verbindungslinie des Bildpunktes $A'(\zeta=-p)$ der Hinterkante $A(z=-2p)$ mit dem Mittelpunkt nennen wir die erste Achse, die Gerade $A'0$ (x-Achse) die zweite Achse des Profils. Wenn der Winkel zwischen beiden Achsen mit β bezeichnet wird, so haben wir folgende unmittelbar verständlichen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} p+b\,e^{i\delta}&=a\,e^{i\beta},\\ a\cos\beta=p+b\cos\delta;\quad a\sin\alpha&=b\sin\delta,\\ a^2=p^2+b^2+2\,p\,b\cos\delta&\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Wie in den Arbeiten von Bickley gezeigt wird, läßt sich durch eine weitere Transformation das Äußere des Kreises, bzw. Profils auf die obere Halbebene $\zeta'(\eta'>0)$ abbilden. Da aber die Rechnungen mit dieser doppelten Abbildung einen ziemlich umständlichen und unübersichtlichen Charakter annehmen, werden wir für die folgenden Entwicklungen unmittelbar an die Verhältnisse in der ζ-Ebene anknüpfen.

Wie bereits aus den allgemeinen Darlegungen hervorgeht, kommen für die Aufstellung der dynamischen Verhältnisse einige rein geometrische Größen, z. B. Flächeninhalt und Schwerpunktlage der Profilfläche vor, die wir zunächst ermitteln wollen.

a) Um den Flächeninhalt der Profilfläche zu ermitteln, gehen wir aus von dem früher eingeführten Randintegral

$$F=-\,\Re\,\frac{1}{2}\oint \bar{z}\,\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\zeta}\,\mathrm{d}\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

das im vorliegenden Falle die Form einnimmt

$$F=-\,\Re\,\frac{1}{2}\int\left(\bar{\xi}+\frac{p^2}{\bar{\xi}}\right)\left(1-\frac{p^2}{\zeta^2}\right)\mathrm{d}\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Setzen wir

$$\zeta=b\,e^{i\delta}+a\,e^{i\varphi}=b\,t_0+a\,t,$$

so wird

$$\bar{\xi}=\frac{b}{t_0}+\frac{a}{t}=\frac{b\,t+a\,t_0}{t\,t_0};\quad \mathrm{d}\,\zeta=a\,\mathrm{d}\,t.$$

Mit Benutzung der Reihenentwicklungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a\,t+b\,t_0}&=\frac{1}{a\,t}\left(1-\frac{b}{a}\,\frac{t_0}{t}+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{t_0^2}{t^2}-\cdots\right),\\ \frac{1}{b\,t+a\,t_0}&=\frac{1}{a\,t_0}\left(1-\frac{b}{a}\,\frac{t}{t_0}+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{t^2}{t_0^2}-\cdots\right),\\ \frac{1}{(a\,t+b\,t_0)^2}&=\frac{1}{(a\,t)^2}\left(1-2\,\frac{b}{a}\,\frac{t_0}{t}+3\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{t_0^2}{t^2}-\cdots\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a)$$

ergibt sich

$$\bar{\xi}+\frac{p^2}{\bar{\xi}}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t_0}+\frac{p^2\,t}{a}\left(1-\frac{b}{a}\,\frac{t}{t_0}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{t}{t_0}\right)^2-\cdots\right),$$

$$1-\frac{p^2}{\zeta^2}=1-\frac{p^2}{a^2\,t^2}\left(1-2\,\frac{b}{a}\,\frac{t_0}{t}+3\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{t_0}{t}\right)^2-\cdots\right).$$

Wenn man den Koeffizienten der Glieder $\frac{1}{t}$ mit c_{-1} bezeichnet, so hat man nach dem Residuumsatz

$$F=\pi\,c_{-1}.$$

Das gibt in unserem Falle für die Fläche F den Wert

$$\left.\begin{aligned} F&=\pi\,a^2\left[1-\frac{p^4}{a^4}\left(1+2\left(\frac{b}{a}\right)^2+3\left(\frac{b}{a}\right)^4+\cdots\right)\right]\\ &=\pi\,a^2\left[1-\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right]\\ &=\pi\,p^2\left[1+\left(\frac{b}{p}\right)^2+2\,\frac{b}{p}\cos\delta\right]\cdot\frac{2\,\frac{b}{p}\cos\delta}{1+2\,\frac{p}{b}\cos\delta}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

$\delta = \frac{\pi}{2}$ gibt den Fall des Kreisbogenprofils mit $F_0 = 0$, wie zu erwarten ist. Für das symmetrische Profil mit $\delta = 0$ haben wir dagegen das Maximum der Fläche bei gegebenen Werten von p und b

$$F = 4\pi a^2 \frac{a\,b}{(a+b)^2}.$$

Da $(a+b)^2 > 4\,a\,b$ ist, so folgt allgemein

$$F < \pi a^2.$$

Die Fläche F ist also jedenfalls kleiner als die Fläche des Grundkreises.

b) Bestimmung des statischen Momentes bzw. des Schwerpunktes der Profilfläche. Nehmen wir als Bezugspunkt den Mittelpunkt des Grundkreises (auch Mittelpunkt des Profils genannt), so haben wir nach früherem

$$\frac{1}{2}\int V\,|z-z_0|^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int |z-z_0|^2\,\mathrm{n}\,\mathrm{d}f = -\frac{1}{2}\,i\int |z-z_0|^2\,\mathrm{d}z = (z_s - z_0)\,F.$$

Nun ist mit derselben Bezeichnung wie oben

$$|z-z_0|^2 = (z-z_0)\,(\bar{z}-\bar{z}_0) = \left(a\,t + \frac{p^2}{a\,t+b\,t_0}\right)\left(\frac{a}{t} + \frac{p^2\,t\,t_0}{a\,t_0+b\,t}\right).$$

Benutzt man die Reihen (a) und die weitere Reihe

$$\frac{1}{(a\,t+b\,t_0)\,(a\,t_0+b\,t)} = \frac{1}{t\,t_0\,(a^2-b^2)}\left(1 + \frac{b}{a}\,\frac{t_0}{t} + \left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{b})$$

und entwickelt nach Potenzen von t und $\frac{b}{a}$, multipliziert ferner mit

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\zeta} = 1 - \frac{p^2}{(a\,t)^2}\left(1 - 2\,\frac{b}{a}\,\frac{t_0}{t} + 3\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{t_0^2}{t^2} - \cdots\right)$$

und integriert, so wird mit $\mathrm{d}\,\zeta = a\,\mathrm{d}\,t$ nach dem Cauchyschen Satz

$$(z_s - z_0)\,F = \pi\,a^2\,\frac{p^4\,b}{a^2-b^2}\left[e^{i\,\delta} + \frac{p^2\,e^{-i\,\delta}}{a^2-b^2}\right].$$

Mit Einsetzung von F ergibt sich also

$$\left.\begin{aligned}(x_s - x_0)\left(1 - \frac{p^2}{a^2-b^2}\right) &= \frac{p^4\,b\cos\delta}{(a^2-b^2)^2},\\ (y_s - y_0)\left(1 + \frac{p^2}{a^2-b^2}\right) &= \frac{p^4\,b\sin\delta}{(a^2-b^2)^2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Bezeichnen wir die Koordinaten in bezug auf ein in den Mittelpunkt M_0 verschobenes System mit x_s' und y_s', so haben wir

$$\left.\begin{aligned}x_s' = x_s - x_0 &= \frac{p^3}{2\,(a^2-b^2)} \sim \frac{p}{2}\left(1 - 2\,\frac{b}{p}\cos\delta\right),\\ x_s' = y_s - y_0 &= \frac{p^3\,b\cos\delta}{2\,(a^2-b^2)\,(p+b\cos\delta)} \sim \frac{b\cos\delta}{2}\left(1 - 3\,\frac{b}{p}\cos\delta\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Für $\delta = 0$ wird

$$x_s' = \frac{p^2}{2\,(p+2\,b)}, \quad y_s' = 0.$$

Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ dagegen haben wir mit $a^2 - b^2 = p^2$ die Werte

$$x_s' = \frac{p}{2}, \quad y_s' = \frac{b}{2}.$$

Es ist bemerkenswert, daß sich der Wert für x_s', für $b = 0$ in beiden Fällen einem von Null verschiedenen Grenzwert nähert, der natürlich hier nicht in Betracht kommt, da die Fläche des Profils verschwindet.

4. Aufbau der Strömung.

Die komplexe Stromfunktion für die absolute Bewegung der Flüssigkeit infolge Translation des Tragflügels leitet sich aus der entsprechenden Funktion für die Relativströmung

$$(\Omega_t)_{\mathrm{rel}} = -v_0\left[(\zeta-\zeta_0)\,e^{i\alpha}+\frac{a^2}{\zeta-\zeta_0}\,e^{-i\alpha}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

durch Hinzufügung der Parallelströmung

$$v_0\, z\, e^{i\alpha}$$

ab. Man erhält dann nach Einsetzen des Wertes für z

$$\Omega_t = v_0\left[\frac{p^2}{\zeta}\,e^{i\alpha}-\frac{a^2}{\zeta-\zeta_0}\,e^{-i\alpha}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Einige rechnerische Schwierigkeiten macht die Herstellung der Stromfunktion, die durch die Rotation des Tragflügels etwa um den Mittelpunkt M_0 bestimmt wird. Wir haben zu dem Zweck zunächst das Quadrat des Abstandes eines Randpunktes des Profils vom Drehpunkt ζ_0 zu ermitteln. Man erhält dafür

$$\left.\begin{aligned} |z-z_0|^2 &= (z-b\,e^{i\delta})\,(\bar{z}-b\,e^{-i\delta}) \\ &= \left(a\,e^{i\varphi}+\frac{p^2}{b\,e^{i\delta}+a\,e^{i\varphi}}\right)\left(a\,e^{-i\varphi}+\frac{p^2}{b\,e^{-i\delta}+a\,e^{-i\varphi}}\right) \\ &= a^2+\frac{2p^2ab\cos(\varphi+\delta)+2p^2a^2\cos 2\varphi+p^4}{a^2+b^2+2ab\cos(\varphi-\delta)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Wenn wir unter Beachtung des Verhaltens im Unendlichen die absolute Stromfunktion Ω_a wieder in der Form

$$\Omega_r = -i\omega\left[\frac{A}{\zeta}+\frac{B}{\zeta-\zeta_0}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

ansetzen, so ist zu verlangen, daß der Imaginärteil der Funktion

$$(\Omega_r)_{\mathrm{rel}} = \Omega_a+\frac{1}{2}\,i\omega\,|z-z_0|^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

auf dem Profilrand konstant wird. Wenn man Ω_a auf den Nenner $N=a^2+b^2+2ab\cos(\varphi-\delta)$ bringt, so wird

$$\Omega_r = -\frac{i\omega}{N}\left[A\,(b\,e^{-i\delta}+a\,e^{-i\varphi})+\frac{1}{a}\,B\,e^{-i\varphi}\cdot N\right].$$

Bringt man nun zum Ausdruck, daß sich im Zähler des Gesamtausdrucks $\frac{1}{i}\,(\Omega_a)_{\mathrm{rel}}$ der Nenner N heraushebt, während der übrigbleibende Faktor gleich einer reellen Konstanten λ wird, so erhält man drei Gleichungen für λ und für die komplexen Größen A und B von folgender Form

$$\left.\begin{aligned} &bB-p^2a^2e^{-i\delta}=0\,, \\ &Aa+\frac{p^2a^3}{b}\,e^{-i\delta}+2ab\lambda\,e^{i\delta}=0\,, \\ &\frac{1}{2}\,p^4-be^{-i\delta}\cdot A-p^2a^2e^{-2i\delta}-\lambda(a^2+b^2)=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Daraus leiten sich dann folgende Werte ab für A, B und λ

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{p^4}{2(a^2-b^2)}\,; \quad A = -\frac{p^2a^2}{b}\,e^{-i\delta}-\frac{p^4b}{a^2-b^2}\,e^{i\delta}, \\ B &= \frac{p^2a^3}{b}\,e^{-i\delta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Man bestätigt dann leicht, daß damit auch die Geschwindigkeitsbedingung erfüllt ist. Als gesuchte Stromfunktion für die Absolutbewegung der Flüssigkeit infolge Drehung des Tragflügels erhält man daher

$$\Omega_r = i\omega p^2\left[\frac{p^2b\,e^{i\delta}}{(a^2-b^2)\,\zeta}-\frac{a^2}{\zeta(\zeta-\zeta_0)}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Zu den beiden durch Translation und Rotation entstehenden Strömungen tritt nun weiter die zirkulatorische Strömung um den Tragflügel hinzu, die der Stromfunktion

$$\Omega_3 = -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\ln(\zeta-\zeta_0)\ . \quad (28)$$

entspricht. Die Größe der Zirkulation Γ bestimmen wir aus der Kuttaschen Bedingung des glatten Abfließens an der Hinterkante des Flügels oder des Zusammenfallens des Bildpunktes der Profilspitze mit einem Staupunkt der Kreisströmung, d. h.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,\zeta}\right)_{\zeta=-p}=0\,.$$

Ohne Rotation erhalten wir, wie bekannt, den Teilwert

$$\Gamma_t = 4\,\pi\,v_0\,a\sin(\alpha+\beta) \quad (29).$$

Bei Berücksichtigung der Drehung wird

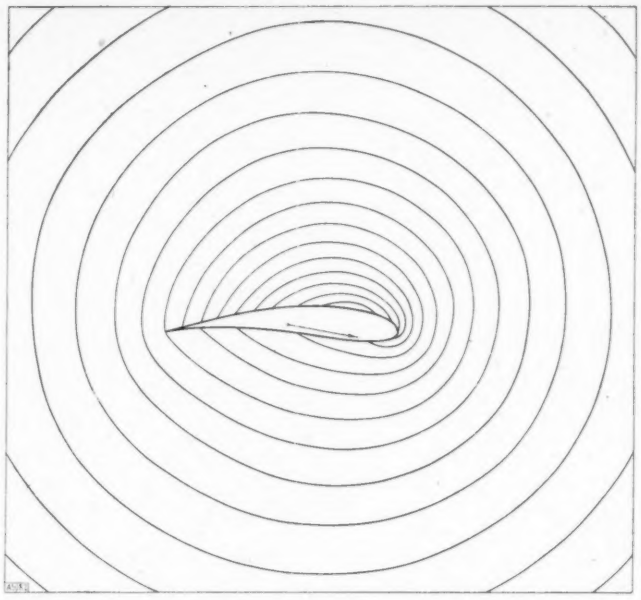


Bild 2. Absolute Stromlinien (Geschwindigkeitslinien) in der Umgebung eines translatorisch bewegten Tragflügels.

$$\Gamma_r = 2\,\pi\,\omega\left\{\frac{(a^2-b^2)\,p}{b}\,e^{-i\,\delta}+a^2-p^2\,e^{-2\,i\,\delta}+\frac{p^2\,b\,(p\,e^{i\,\delta}+b\,e^{2\,i\,\delta})}{a^2-b^2}\right\}$$

oder bei Benutzung der Formeln (2)

$$\Gamma_r = 4\,\pi\,\omega\left[a^2-b^2+\frac{p\,b^2\cos\delta}{a^2-b^2}\right]=4\,\pi\,\omega\left[p^2+2\,p\,b\cos\delta+\frac{b^3\cos\delta}{p+2\,b\cos\delta}\right] \quad . \quad (30).$$

Man sieht dann, daß damit auch die imaginären Ausdrücke in der Bedingungsgleichung verschwinden. Damit ergibt sich als Gesamtzirkulation

$$\Gamma = 4\,\pi\left[v_0\,a\sin(\alpha+\beta)+\omega\left(a^2-b^2+\frac{p\,b^3\cos\delta}{a^2-b^2}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Für die vollständige Absolutströmung in der Umgebung eines Tragflügels erhalten wir also die komplexe Stromfunktion

$$\left.\begin{aligned}\Omega = v_0\left[\frac{p^2}{\zeta}\,e^{i\,\alpha}-\frac{a^2}{\zeta-\zeta_0}\,e^{-i\,\alpha}\right]+i\,\omega\,p^2\left[\frac{p^2\,b\,e^{i\,\delta}}{(a^2-b^2)\,\zeta}-\frac{a^2}{\zeta\,(\zeta-\zeta_0)}\right]\\ -2\,i\left[v_0\,a\sin(\alpha+\beta)+\omega\left(a^2-b^2+\frac{p\,b^3\cos\delta}{a^2-b^2}\right)\right]\ln(\zeta-\zeta_0)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Um eine Anschauung des Strombildes zu vermitteln, haben wir wie früher im Fall der Platte die absoluten Feldlinien für die Translation und Rotation getrennt graphisch dargestellt. Bild 2 bezieht sich auf die absolute Strömung um einen Tragflügel bei Translation mit Kutta-Zirkulation, die mehrfach früher von mir skizziert, aber bisher noch nicht punktweise genau konstruiert wurde. Die Stromfunktion läßt sich nach Weglassung der zweiten und höheren Potenzen von $\frac{b}{a}$ und mit Einführung von $r=\frac{R}{a}$, also

$$\zeta-\zeta_0 = R\,e^{i\varphi} = a\,r\,e^{i\varphi}$$

in die Form

$$\frac{1}{v_0\,a}\,\Psi_t = \frac{1}{r}\sin(\varphi+\alpha)-\frac{p^2}{a^2}\,\frac{1}{r}\sin(\varphi-\alpha)+\frac{p^2}{a^2}\,\frac{b}{a}\,\frac{1}{r^2}\sin(2\varphi-\delta-\alpha)-2\sin(\alpha+\beta)\lg r \quad (33)$$

bringen. Die Stromfunktion Ψ_r der durch Drehung verursachten Bewegung lautet dagegen

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\omega p^2}\Psi_r = \frac{1}{r}\Big[&\frac{p^2 b}{a(a^2-b^2)}\cos(\varphi-\delta) - \frac{p^2}{a^2-b^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{r}\cos 2(\varphi-\delta)\\ &+\frac{b}{a}\cos(3\varphi-\delta)\cdot\frac{1}{r^2}\Big] - 2\left(1+\frac{b}{p}\cos\delta\right)\lg r\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (34).$$

Die Übertragung der Punkte in den $r\varphi$-Koordinaten der ζ-Ebene auf die z-Ebene geschieht mit Hilfe der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \left(r+\frac{p^2}{a^2 r}\right)\cos\varphi + \frac{b}{a}\left[\cos\delta - \frac{p^2}{a^2}\frac{1}{r^2}\cos(2\varphi-\delta)\right],\\ \frac{y}{a} &= \left(r-\frac{p^2}{a^2 r}\right)\sin\varphi + \frac{b}{a}\left[\sin\delta + \frac{p^2}{a^2}\frac{1}{r^2}\sin(2\varphi-\delta)\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (35).$$

Die entsprechenden Stromlinien sind in Bild 3 dargestellt[3]).

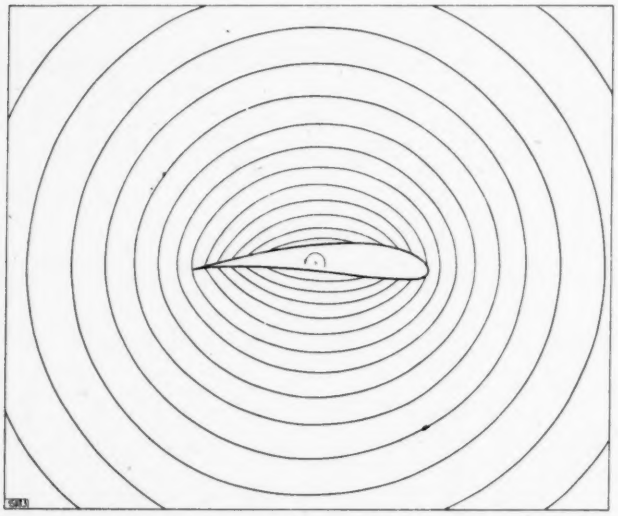


Bild 3. Absolute Stromlinien in der Umgebung eines rotierenden Tragflügels mit Zirkulation.

5. Berechnung der Impulsgrößen.

Die gegebenen Grundformeln (10) lassen sich ohne weiteres auf den vorliegenden Fall anwenden. So hat der von der Translation herrührende Impulsvektor die Form

$$\left.\begin{aligned}J_t &= i\varrho\oint \Omega_1(\zeta)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta\\ &\quad -\varrho\, v_0\, e^{-i\alpha}\cdot F\end{aligned}\right\} \quad (36),$$

wo für F der bereits ermittelte Wert für die Profilfläche einzusetzen ist. Man erhält nach dem Residuumsatz

$$i\varrho\oint \Omega_1(\zeta)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta = -2\pi\varrho\, v_0\left[p^2 e^{i\alpha} - a^2 e^{-i\alpha}\right].$$

Daher wird im ganzen

$$\left.\begin{aligned}J_t &= -2\pi\varrho\, v_0\left[p^2 e^{i\alpha} - a^2 e^{-i\alpha}\right] - \varrho\, v_0\, e^{-i\alpha}\cdot\pi a^2\left[1-\frac{p^4}{(a^2+b^2)^2}\right]\\ &= -2\pi\varrho\, v_0\, p^2 e^{i\alpha} + \pi\varrho\, v_0\, a^2 e^{-i\alpha}\left[1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37)$$

in Übereinstimmung mit dem von Bickley gegebenen Ausdruck. Für die Komponenten erhält man

$$\left.\begin{aligned}J_x &= \pi\varrho\, v_0\cos\alpha\left\{a^2\left[1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right]-2p^2\right\},\\ J_y &= -\pi\varrho\, v_0\sin\alpha\left\{a^2\left[1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right]+2p^2\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (38),$$

wo a^2 durch $p^2+b^2+2pb\cos\delta$ und a^2-b^2 durch $p^2+2pb\cos\delta$ ersetzt werden kann.

Ebenso läßt sich der Beitrag der Rotation zum Impuls berechnen. Man hat nach früherem

$$J_r = i\varrho\oint \Omega_2(\zeta)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2}i\varrho\int i\omega|z-z_0|^2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta = J_r' + J_r'' \quad \ldots\ldots (39).$$

Für das erste Integral erhält man bei Benutzung des Ausdrucks

$$J_r' = i\varrho\int \Omega_2(\zeta)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta = -2i\pi\varrho\,\omega\, p^4\frac{b\, e^{i\delta}}{a^2-b^2} \quad \ldots\ldots (40).$$

[3]) Die Ausführung der Zeichnungen nach meinen genau berechneten Vorlagen verdanke ich Herrn Kara-Eneff-München.

Das zweite Integral ist bis auf den Faktor $i\varrho$ bereits berechnet. Man hat

$$J_r'' = -i\pi\varrho\omega p^4 \frac{a^2 b}{(a^2-b^2)^2}\left[e^{i\delta} + \frac{p^2 e^{-i\delta}}{a^2-b^2}\right] \quad (41).$$

Im ganzen wird daher

$$J_r = -i\pi\omega p^4 \left[\frac{2b e^{i\delta}}{a^2-b^2} + \frac{a^2 b}{(a^2-b^2)^2}\left(e^{i\delta} + \frac{p^2 e^{-i\delta}}{a^2-b^2}\right)\right] \quad (42).$$

Schließlich sind noch die Impulsmomente L_t und L_r für die Translation und Rotation nach derselben Integrationsmethode zu ermitteln. Wir erhalten z. B.

$$L_t = \Re\varrho \int \Omega(\zeta)(\bar{z}-\bar{z}_0)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta + \varrho\mathfrak{v}_0 \times \int \mathfrak{r}\,\mathrm{d}\tau \quad (43).$$

Das erste Integral kann nach dem früher angegebenen Verfahren ausgewertet werden, wenn man etwa die Variable $e^{i\varphi} = t$ einführt und $e^{i\delta} = t_0$ setzt und die Partialbruchzerlegung ausführt. Man erhält auf diese Weise

$$(L_t)_1 = -2\pi\varrho v_0 a^2 b\left[\frac{p^4 \sin(\delta+\alpha)}{(a^2-b^2)^2} - \frac{p^4\sin(\delta+\alpha)}{a^2(a^2-b^2)} + \frac{p^6\sin(\alpha-\delta)}{(a^2-b^2)^3}\right] \quad (44).$$

Der zweite Ausdruck wird bei Verwendung der oben berechneten Werte für $\mathfrak{r}_s$ und F

$$(L_t)_2 = \frac{\pi\varrho v_0 a^2 p^4}{(a^2-b^2)^3}[b\sin(\delta+\alpha) + p\sin\alpha][a^2-b^2-p^2] \quad (45),$$

wo $a^2-b^2-p^2$ auch durch $2pb\cos\delta$ ersetzt werden kann. Damit wird insgesamt nach Vereinfachung

$$L_t = -\pi\varrho v_0 a^2 b p^4\left[\frac{\sin(\delta+\alpha)}{(a^2-b^2)^2} - \frac{2\sin(\delta+\alpha)}{a^2(a^2-b^2)} - \frac{p^2\sin(\delta-\alpha)}{(a^2-b^2)^3}\right] \quad (46).$$

Man sieht, daß L_t verschwindet für $b=0$, d. h. für den Fall der ebenen Platte. Für $\delta = \frac{\pi}{2}$, d. h. für die kreisförmig gebogene Platte ergibt sich wegen $p^2 = a^2 - b^2$

$$L_t = 2\pi\varrho v_0 p^2 b\cos\alpha \quad (47).$$

Der Bezugspunkt liegt in der Mitte des Mittellotes der Sehne bis zum Scheitelpunkt des Kreisbogens (Bild 6). Wenn man den Halbmesser des Kreisbogens mit r und seine Winkelöffnung mit 2γ bezeichnet, so hat man die geometrisch unmittelbar verständlichen Beziehungen

$$r = \frac{a^2}{b},\quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{b}{a},\quad a = r\sin\frac{\gamma}{2},\quad b = r\sin^2\frac{\gamma}{2},\quad p = r\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Daher kann man für das Impulsmoment auch schreiben

$$L_t = 2\pi\varrho v_0 r^3 \sin^4\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos\alpha \quad (48).$$

Für das durch Drehung verursachte Impulsmoment erhält man, weil das Moment der inneren Flüssigkeitsmenge verschwindet,

$$L_r = +\Re\varrho i\omega\int\left[\frac{p^4 b e^{i\delta}}{(a^2-b^2)\zeta} - \frac{a^2p^2}{\zeta(\zeta-\zeta_0)}\right](\bar{z}-\bar{z}_0)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta \quad (49).$$

Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir das Ergebnis

$$L_r = \frac{2\pi\varrho\omega p^4}{a^2-b^2}\left[a^2 - \frac{p^2 b^4\cos 2\delta}{(a^2-b^2)^2} - \frac{p^4 a^2 b^2}{(a^2-b^2)^3}\right] \quad (50).$$

Für $b=0$, $\delta=0$ geht der Ausdruck über in den für die ebene Platte gültigen Wert

$$L_r = 2\pi\varrho\omega a^4 \quad (51),$$

der sich in Übereinstimmung befindet mit der von Omara durchgeführten Rechnung[4]).

Für die unendlich dünne kreisförmig gebogene Platte $\left(\delta = \frac{\pi}{2}\right)$ wird

$$L_r = 2\pi\varrho\omega p^4 \quad (52)$$

oder mit Einführung des Kreishalbmessers r und des Öffnungswinkels γ

$$L_r = 2\pi\varrho\omega r^4\sin^4\frac{\gamma}{2}\cos^4\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}\pi\varrho\omega r^4\sin^2\gamma \quad (52a).$$

[4]) Vgl. M. A. Omara: Philos. Magaz. Bd. 27 (1939), S. 207.

6. Bestimmung der Kräfte bei konstanter Geschwindigkeit.

Wenn wir zunächst von der Beschleunigung ganz absehen, so ergeben sich aus den allgemeinen Formeln für die Kraft und das Moment in bezug auf den Profilmittelpunkt folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} P_C &= i\,\varrho\,v_0\,e^{-i\alpha}\cdot\Gamma = 4\,i\,\pi\,\varrho\,v_0^2\,e^{-i\alpha}\,a\sin(\alpha+\beta),\\ M &= 2\,\pi\,\varrho\,v_0^2\,p^2\sin 2\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53).$$

Mit Hilfe der Gleichungen

$$A = P_x\sin\alpha + P_z\cos\alpha; \qquad W = P_z\sin\alpha - P_x\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

erhalten wir daraus für den Auftrieb senkrecht zur Bewegungsrichtung und für den Widerstand entgegen dieser Richtung die Formeln

$$A = 4\,\pi\,\varrho\,a\,v_0^2\sin(\alpha+\beta); \qquad W = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

mit den Beiwerten

$$c_a = \frac{A}{\frac{1}{2}\,\varrho\,v_0^2\cdot 4\,p} = 2\,\pi\,\frac{a}{p}\sin(\alpha+\beta); \qquad c_w = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55\,a),$$

die mit den bekannten Ergebnissen der Kuttaschen Theorie übereinstimmen. Wenn man das Moment auf das Vorderende bezieht, das durch den Punkt mit den Koordinaten $2\,p, 0$ dargestellt sein möge, der bei dünnen Profilen dem Kopfende sehr nahe liegt, so hat man für das Moment

$$M' = M - 2\,p\,(A\cos\alpha + W\sin\alpha) + b\,A\cos(\delta+\alpha) + b\,W\sin(\delta+\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

oder für den Absolutbetrag des entsprechenden Beiwertes

$$c'_{m\,t} = -\,c_m + \left[\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{4}\,\frac{b}{p}\cos(\delta+\alpha)\right] c_a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Mit Hilfe der ohne weiteres verständlichen Beziehung

$$a\sin(\alpha+\beta) = p\sin\alpha + b\sin(\delta+\alpha)$$

wird daraus mit $\frac{b}{p} = \varepsilon$

$$(c'_m)_t = \frac{1}{4}\,\pi\sin 2\alpha + \pi\,\varepsilon\left[\frac{1}{2}\sin\delta\,(1+\cos^2\alpha) + \frac{1}{4}\sin\delta\sin 2\alpha\right] - \frac{1}{4}\,\pi\,\varepsilon^2\sin 2(\delta+\alpha).$$

Wenn man bei kleinem α, $\cos^2\alpha \sim 1$ setzt und $\varepsilon\sin\delta\sin\alpha$, ebenso das Glied mit ε^2 vernachlässigt, so erhält man angenähert

$$\left.\begin{aligned} (c'_m)_t &\sim \frac{1}{4}\,\pi\sin 2\alpha + \pi\,\varepsilon\sin\delta\\ &\sim \frac{1}{4}\,\pi\,2\alpha + \pi\,\frac{a}{p}\sin\beta \sim \frac{1}{4}\,\pi\,(\alpha+\beta) \sim \frac{1}{2}\,\pi\,\beta,\\ (c'_m)_t &\sim c_{m\,0} + \frac{1}{4}\,c_a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Es ergibt sich also im Einklang mit den Ergebnissen der Messung ein angenähert geradliniger Verlauf der $(c'_m\,c_a)$-Kurve, deren Steigung von den Abmessungen des Profils nur unwesentlich abhängt und ungefähr den Wert $c_a : c'_m = 4 : 1$ besitzt.

7. Einfluß der Bahnbeschleunigung auf die Kräfte am Tragflügel.

Wenn wir zunächst von der Drehbewegung absehen und nur die tangentiale oder Bahnbeschleunigung berücksichtigen, so ist dem Ausdruck für die Druckkraft noch die negative Ableitung des Impulses hinzuzufügen. Wir haben also nach (37)

$$\left.\begin{aligned} P_C &= i\,\varrho\,v_0\,e^{-i\alpha}\,\Gamma - \frac{\partial J}{\partial t}\\ &= 4\,i\,\pi\,\varrho\,a\,v_0^2\,e^{-i\alpha}\sin(\alpha+\beta) - \pi\,\varrho\,\dot v_0\left[-2\,p^2\,e^{i\alpha} + a^2\,e^{-i\alpha}\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (59),$$

woraus sich die Komponentenwerte

$$\left.\begin{aligned} P_x &= 4\pi\varrho v_0^2 a \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha + \pi\varrho\dot{v}_0\cos\alpha\left[2p^2 - a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right], \\ P_y &= 4\pi\varrho v_0^2 a \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + \pi\varrho\dot{v}_0\sin\alpha\left[2p^2 + a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

ableiten. Für den Auftrieb und den Widerstand erhalten wir also aus (54) die Formeln

$$\left.\begin{aligned} A &= 4\pi\varrho a v_0^2 \sin(\alpha+\beta) + 2\pi\varrho p^2\dot{v}_0\sin 2\alpha, \\ W &= 2\pi\varrho p^2\dot{v}_0\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2}\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right) - \cos 2\alpha\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Das Moment in bezug auf den Mittelpunkt des Profiles wird

$$M = 2\pi\varrho v_0^2 p^2 \sin 2\alpha - \frac{\partial L_t}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

In den weitaus meisten Fällen wird das für die Kraftwerte maßgebende Verhältnis $\frac{p\dot{v}_0}{v_0^2}$ so klein ausfallen, daß sich die von der Bahnbeschleunigung herrührenden Bestandteile der Kräfte vernachlässigen lassen. Immerhin sind Bewegungsvorgänge möglich (wie etwa beim Start oder beim Sturzflug), wo der Einfluß der Beschleunigung ins Gewicht fallen kann, so daß eine grundsätzliche Beschäftigung mit den einschlägigen Fragen sich als zweckmäßig erweist. Wir wollen daher die durch Beschleunigung hervorgerufenen Zusatzkräfte allein berücksichtigen und entsprechende dimensionslose Beiwerte einführen gemäß den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} k_a &= \frac{A}{2\varrho p^2\dot{v}_0} = \pi\sin 2\alpha, \\ k_w &= \frac{W}{2\varrho p^2\dot{v}_0} = \pi\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2}\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right) - \cos 2\alpha\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Die Abhängigkeit dieser Werte vom Anstellwinkel hat große Ähnlichkeit mit dem Verlauf der Meßwerte für die auf die konstante Bahngeschwindigkeit bezogenen Zahlen c_a und c_w. Während k_a für kleine α etwa geradlinig ansteigt, wächst k_w vom kleinsten Wert bei $\alpha = 0$ an, nach beiden Seiten, d. h. für positive und negative Werte von α in gleichem Maße. Schreibt man k_w in der Form

$$k_w = \pi(q - \cos 2\alpha),$$

so sieht man, daß die „Polarkurve" ein Kreis wird, dessen Mittelpunkt auf der k_w-Achse in dem Punkt $q\pi\,(>\pi)$ liegt und dessen Halbmesser die Größe π hat. Wir haben in den Bildern 4 und 5 die Abhängigkeit der Beiwerte vom Anstellwinkel und den praktisch brauch-

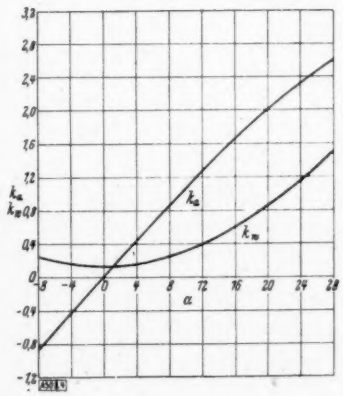


Bild 4 (oben). Beiwerte der Zusatzkräfte infolge Bahnbeschleunigung.

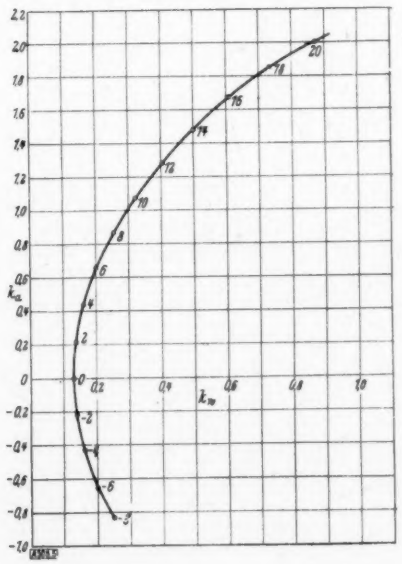


Bild 5 (rechts). Polardiagramm für die Kräfte am Tragflügel infolge Bahnbeschleunigung.

baren Teil der Polarkurve für die Profilkonstanten $a=5$, $b=0{,}707$, $\delta=\frac{\pi}{4}$ ($p=4{,}475$) dargestellt. Man sieht jedenfalls, daß eine positive Bahnbeschleunigung bei normalen Anstellwinkeln eine Vergrößerung sowohl des Auftriebs wie des Widerstandes zur Folge hat, während eine Verzögerung im allgemeinen zur Verkleinerung beider Kräfte beiträgt. Bei negativem α wird k_a negativ. So entsteht z. B. auch beim beschleunigten Sturzflug ($c_a=0$, $\alpha=-\beta$) eine wenn auch kleine Seitenkraft mit

$$k_a=-\pi\sin 2\beta,$$

die unter Umständen zur Änderung der Bahnrichtung beitragen kann. Interessant ist vor allem die Frage nach der Lage der Kraft, bzw. der Verschiebung der Kraftlage infolge der Beschleunigung. Wir benutzen den Ausdruck für das Impulsmoment, aus dem sich das Moment

$$M=-\frac{\partial L_r}{\partial t}=\frac{\pi\varrho\,\dot v_0 a^2 b\,p^4}{a^2-b^2}\left[\frac{\sin(\delta+\alpha)}{a^2-b^2}-\frac{2\sin(\delta+\alpha)}{a^2}-\frac{p^2\sin(\delta-\alpha)}{(a^2-b^2)^2}\right] \quad . \; . \; . \quad (64)$$

ergibt. Daraus leiten wir die Gleichung der Wirkungslinie der nur durch die Beschleunigung $\dot v_0$ verursachten Kraft ab. Mit den Werten (60) erhalten wir mit $v_0=0$

$$\left.\begin{aligned} x\sin\alpha\left[2p^2+a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right]-y\cos\alpha\left[2p^2-a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right.&\\ =\frac{a^2 b\,p^4}{a^2-b^2}\left[\frac{\sin(\delta+\alpha)}{a^2-b^2}-\frac{2\sin(\delta+\alpha)}{a^2}-\frac{p^2\sin(\delta-\alpha)}{(a^2-b^2)^2}\right]&\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (65).$$

Differenzieren wir nach α, so haben wir zur Bestimmung des Schnittpunktes zweier benachbarter Angriffslinien die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x\sin\alpha\,A-y\cos\alpha\,B&=\frac{a^2 b\,p^4}{a^2-b^2}\left[\frac{\sin(\delta+\alpha)}{a^2-b^2}-\frac{2\sin(\delta+\alpha)}{a^2}-\frac{p^2\sin(\delta+\alpha)}{(a^2-b^2)^2}\right],\\ x\cos\alpha\,A+y\sin\alpha\,B&=\frac{a^2 b\,p^4}{a^2-b^2}\left[\frac{\cos(\delta+\alpha)}{a^2-b^2}-\frac{2\cos(\delta+\alpha)}{a^2}+\frac{p^2\cos(\delta-\alpha)}{(a^2-b^2)^2}\right]\end{aligned}\right\} \quad (66),$$

wo zur Abkürzung

$$A=2p^2+a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right);\qquad B=2p^2-a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)$$

gesetzt wurde. Eliminiert man α, so kommt

$$\left.\begin{aligned} x\,A=\frac{a^2 b\,p^4}{a^2-b^2}\cos\delta\left[\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2}{a^2}+\frac{p^2}{(a^2-b^2)^2}\right]&=\cos\delta\,C,\\ y\,B=\frac{a^2 b\,p^4}{a^2-b^2}\sin\delta\left[-\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{2}{a^2}+\frac{p^2}{(a^2-b^2)^2}\right]&=\sin\delta\,D\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (67).$$

Es ergibt sich also das bemerkenswerte Ergebnis, daß die Wirkungslinien der Kräfte für alle Anstellwinkel durch denselben invariablen Punkt hindurchgehen, der in bezug auf den Mittelpunkt des Profils die Koordinaten

$$x=\frac{C\cos\delta}{A};\qquad y=\frac{D\sin\delta}{B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

hat. Wir wollen diesen Punkt kurz als Beschleunigungspunkt bezeichnen.

Betrachten wir zur Prüfung dieses Ergebnisses etwa den ausgearteten Fall des unendlich dünnen kreisbogenförmigen Profils, so ergibt die Rechnung bei Benutzung der Beziehungen

$$k_a=\pi\sin 2\alpha;\qquad k_w=\pi\left(\frac{a^2}{p^2}-\cos 2\alpha\right)=\pi\left[\frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}-\cos 2\alpha\right].$$

Die Koordinaten des Beschleunigungspunktes werden

$$x=0;\qquad y=-\frac{p^2}{b}.$$

Der Abstand des Punktes vom Kreisbogen wird daher

$$\frac{p^2}{b}+b=\frac{p^2+b^2}{b}=\frac{a^2}{b}=r.$$

Der Beschleunigungspunkt fällt also im Falle des Kreisbogens mit dem Kreismittelpunkt zusammen[5]). Die durch diesen Punkt hindurchgehenden Kräfte stehen also senkrecht auf dem Kreis (Bild 6). Die Gleichung der Angriffslinie erhält die Form

$$x \sin\beta\,(p^2+a^2) + y\cos\alpha\, b^2 + p^2 b\cos\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Transformiert man auf den Kreismittelpunkt, so erhält man die reduzierte Gleichung

$$x\sin\alpha\,(p^2+a^2) + y\cos\alpha\, b^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69\text{a}).$$

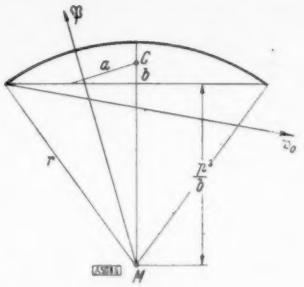


Bild 6. Zur beschleunigten Translation einer kreisförmig gekrümmten Platte.

8. Einfluß der Drehung um die Querachse auf die Kräfte am Tragflügel.

Wir wollen jetzt von der Bahnbeschleunigung absehen und eine gleichmäßige Drehbewegung um die Querachse voraussetzen, die der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω entspricht. Unsere allgemeinen Formeln geben dann ohne weiteres als Ausdruck für die auf den Tragflügel wirkende Druckkraft

$$\left.\begin{aligned} P &= -i\,\omega J + i\,\varrho\, v_0\, e^{-i\alpha}\,\Gamma \\ &= -i\,\pi\,\varrho\,\omega^2 \frac{p^4 b}{a^2-b^2}\left[2\,e^{-i\delta} + \frac{a^2}{a^2-b^2}\left(e^{i\delta} + \frac{p^2 e^{-i\delta}}{a^2-b^2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70).$$

Daraus leiten sich folgende Komponentenwerte ab

$$\left.\begin{aligned} P_x &= 4\pi\varrho\, v_0 \sin\alpha\left[v_0\, a\sin(\alpha+\beta) + \omega\left(a^2-b^2+\frac{p\,b^3\cos\delta}{a^2-b^2}\right)\right] \\ &\quad - \pi\varrho\, v_0\,\omega\sin\alpha\left[2p^2 + a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right] - \frac{\pi\varrho\,\omega^2 p^4 b\cos\delta}{a^2-b^2}\left[2+\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(1+\frac{p^2}{a^2-b^2}\right)\right], \\ P_y &= 4\pi\varrho\, v_0\cos\alpha\left[v_0\, a\sin(\alpha+\beta) + \omega\left(a^2-b^2+\frac{p\,b^3\cos\delta}{a^2-b^2}\right)\right] \\ &\quad + \pi\varrho\, v_0\,\omega\cos\alpha\left[2p^2 - a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right] - \frac{\pi\varrho\,\omega^2 p^4 b\sin\delta}{a^2-b^2}\left[2+\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(1-\frac{p^2}{a^2-b^2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (71),$$

die dann weiter Auftrieb und Widerstand ergeben in der Form

$$\left.\begin{aligned} A &= 4\pi\varrho\, v_0^2\, a\sin(\alpha+\beta) + \pi\varrho\, v_0\,\omega\left[4\left(a^2-b^2+\frac{p\,b^3\cos\delta}{a^2-b^2}\right) + 2p^2\cos 2\alpha - a^2\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right] \\ &\quad - \frac{\pi\varrho\,\omega^2 p^4}{(a^2-b^2)^2}\left[(3a^2b-2b^3)\sin(\delta+\alpha) - \frac{p^2 a^2 b}{a^2-b^2}\sin(\delta-\alpha)\right], \\ W &= 2\pi\varrho\, v_0\,\omega\, p^2\sin 2\alpha + \frac{\pi\varrho\, a^2 p^4}{(a^2-b^2)^2}\left[(3a^2b-2b^3)\cos(\delta+\alpha) + \frac{p^2 a^2 b}{a^2+b^2}\cos(\delta-\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \quad (72).$$

Das Moment der Kräfte in bezug auf den Profilmittelpunkt wird ferner gemäß den allgemeinen Grundgesetzen

$$\left.\begin{aligned} M &= \Re\,(i\, v_0\, e^{i\alpha}\cdot J) \\ &= 2\pi\varrho\, v_0^2\, p^2\sin 2\alpha + \pi\varrho\, v_0\,\omega\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\left[(3a^2b-2b^3)\cos(\delta+\alpha) + \frac{a^2 b p^2}{a^2-b^2}\cos(\delta-\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \quad (73).$$

Setzen wir wieder

$$A = c_a\cdot\frac{1}{2}\,\varrho\, v_0^2\cdot 4p; \qquad W = c_w\cdot\frac{1}{2}\,\varrho\, v_0^2\cdot 4p; \qquad M = c_m\,\frac{1}{2}\,\varrho\, v_0^2\,(4p)^2,$$

so entstehen schließlich für die dimensionslosen Beiwerte die Formeln

$$\left.\begin{aligned} c_a &= 2\pi\frac{a}{p}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\pi\frac{\omega p}{v_0}\left\{4\left[\frac{a^2-b^2}{p^2}+\frac{b^3\cos\delta}{p\,(a^2-b^2)}\right] + 2\cos 2\alpha - \frac{a^2}{p^2}\left(1+\frac{p^4}{(a^2-b^2)^2}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)^2\frac{p}{(a^2-b^2)^2}\left[(3a^2b-2b^3)\sin(\delta+\alpha) - \frac{p^2 a^2 b}{a^2-b^2}\sin(\delta-\alpha)\right], \\ c_w &= \pi\frac{\omega p}{v_0}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)^2\frac{p}{(a^2-b^2)^2}\left[(3a^2b-2b^3)\cos(\delta+\alpha) + \frac{p^2 a^2 b}{a^2-b^2}\cos(\delta-\alpha)\right], \\ c_m &= \frac{1}{4}\pi\sin 2\alpha + \frac{1}{8}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\frac{p}{(a^2-b^2)^2}\left[(3a^2b-2b^3)\cos(\delta+\alpha) + \frac{p^2 a^2 b}{a^2-b^2}\cos(\delta-\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \quad (74).$$

[5]) Vgl. W. G. Bickley: Philos. Magaz. a. Journ. of Sc. Bd. 55, 6. Ser. (1918), S. 396; Philos. Trans., Ser. A, Bd. 228 (1929), S. 235.

Wenn man $\frac{b}{p} = \varepsilon$ einführt, so wird z. B. angenähert bei dünnen Profilen

$$\frac{p^4}{a^2 - b^2} = \frac{p^2}{1 + 2\varepsilon\cos\delta} \sim p^2(1 - 2\varepsilon\cos\delta),$$

$$p^4 \frac{3a^2 b - 2b^3}{(a^2 - b^2)^2} = b\,p^4 \frac{3(p^2 + 2pb\cos\delta) + b^2}{(p^2 + 2pb\cos\delta)^2} = \varepsilon p^3 \frac{3(1 + 2\varepsilon\cos\delta) + \varepsilon^2}{(1 + 2\varepsilon\cos\delta)^2} \sim 3\varepsilon p^3(1 - 2\varepsilon\cos\delta),$$

$$p^6 \frac{a^2 b}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{\varepsilon p^3 (1 + 2\varepsilon\cos\delta)}{(1 + 2\varepsilon\cos\delta)^3} \sim \varepsilon p^3(1 - 4\varepsilon\cos\delta).$$

Bei Beschränkung auf die erste Potenz von ε kommt daher

$$\left.\begin{aligned} c_a &= 2\pi\frac{a}{p}\sin(\alpha + \beta) + 2\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)(\cos^2\alpha + 2\varepsilon\cos\delta) - \pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)^2 \varepsilon\,[2\cos\delta\sin\alpha + \sin\delta\cos\alpha], \\ c_w &= \pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\sin 2\alpha + \pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)^2 \varepsilon\,[2\cos\delta\cos\alpha - \sin\delta\sin\alpha], \\ c_m &= \frac{1}{4}\pi\sin 2\alpha + \frac{1}{8}\pi\frac{\omega p}{v_0}\varepsilon\,[3\cos(\delta + \alpha) + \cos(\delta - \alpha)] \end{aligned}\right\} \quad (75).$$

Wenn man das Moment auf den Punkt $2p, 0$ bezieht, so hat man nach der unter (56) aufgestellten Reduktionsformel nach gleichzeitiger Änderung des Vorzeichens für den Absolutbetrag des Beiwertes

$$\left.\begin{aligned} c'_m &= (c'_m)_t \\ &+ \frac{1}{8}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\cdot\left\{\left|\frac{2p^3 b + 4b^4\cos\delta}{p^2(a^2 - b^2)} + \frac{b(3a^2 - 4b^2)}{p^3}\right|\cos(\delta + \alpha) + \left|\frac{p^3 a^2 b}{(a^2 - b^2)^2} + 2\frac{b}{p}\right|\cos(\delta - \alpha)\right\} \\ &- \frac{3}{2}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\cos\alpha - 2\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\frac{b}{p}\cos\delta - \pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\frac{b^3}{p(a^2 - b^2)}\cos\delta\cos\alpha, \\ &+ \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)\frac{a^2}{p^2}\cos\alpha\left(1 + \frac{p^4}{(a^2 - b^2)^2}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)^2\sin\delta\left[\frac{3a^2 b - 2b^3}{(a^2 - b^2)^2}p - \frac{a^2 b p^3}{(a^2 - b^2)^3}\left(1 - \frac{b}{p}\cos\delta\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (76),$$

wo der nur von der Translation abhängige Teil $(c'_m)_t$ bereits früher näher bestimmt wurde. Bei Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von $\frac{b}{p} = \varepsilon$ erhält man daraus

$$c'_m = (c'_m)_t - \pi\frac{\omega p}{v_0}\cos\alpha - \frac{1}{4}\pi\frac{\omega p}{v_0}\varepsilon\,[4\cos\delta\cos\alpha + \sin\delta\sin\alpha] + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega p}{v_0}\right)^2\varepsilon\sin\delta.$$

Zur Veranschaulichung dieser Formeln haben wir die Beiwerte für einige Werte des Verhältnisses $\frac{\omega p}{v_0}$ in Abhängigkeit von dem Anstellwinkel aufgezeichnet. Im gewöhnlichen Bereich der Anstellwinkel verlaufen die c_a- und c_w-Kurven ungefähr geradlinig. Während aber die Auftriebskurven angenähert parallel liegen bei den verschiedenen Werten von $\frac{\omega p}{v_0}$,

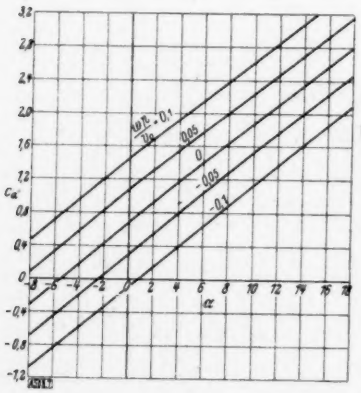


Bild 7 (links). Einfluß der Drehung eines Tragflügels auf die Auftriebswerte.

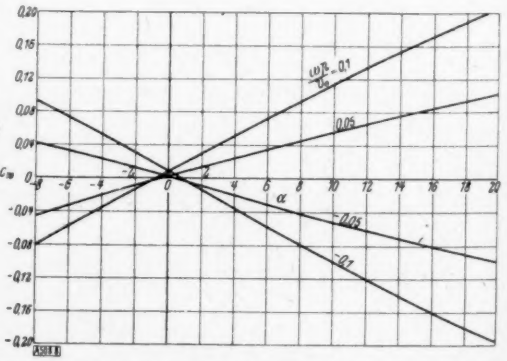


Bild 8. Einfluß der Drehung eines Tragflügels auf die Widerstandswerte.

derart, daß c_a wächst bei positiver Drehung, so erfahren die Widerstandskurven bei Anwachsen des Verhältnisses eine Schwenkung im positiven Sinne oder eine Vergrößerung der Steigung.

7. Einfluß der Drehbeschleunigung auf die Kräfte am Tragflügel.

Wenn wir bei der Drehung eine Tangentialbeschleunigung annehmen, so sind die dadurch hervorgerufenen Kräfte durch die Beziehung

$$P=-\frac{\partial J_r}{\partial t}=i\pi\varrho\dot{\omega}p^4\left[\frac{2b\,e^{i\delta}}{a^2-b^2}+\frac{a^2b}{(a^2-b^2)^2}\left(e^{i\delta}+\frac{p^2e^{-i\delta}}{a^2-b^2}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

bestimmt, aus der sich dann wie früher folgende Auftriebs- und Widerstandswerte

$$\left.\begin{aligned} A&=\pi\varrho\dot{\omega}p^4\left[\frac{3a^2b-2b^3}{(a^2-b^2)^2}\cos(\delta-\alpha)+\frac{a^2bp^2}{(a^2-b^2)^3}\cos(\delta-\alpha)\right],\\ W&=\pi\varrho\dot{\omega}p^4\left[\frac{3a^2b-2b^3}{(a^2-b^2)^2}\sin(\delta+\alpha)-\frac{a^2bp^2}{(a^2-b^2)^3}\sin(\delta-\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

ableiten, denen entsprechende Beiwerte, etwa

$$k_a=\frac{A}{\varrho\dot{\omega}p^3};\qquad k_w=\frac{W}{\varrho\dot{\omega}p^3}$$

zugeordnet werden können. Da das Moment durch den Ausdruck

$$M=-\frac{\partial L_r}{\partial t}=-\frac{2\pi\varrho\dot{\omega}p^4}{a^2-b^2}\left[a^2-\frac{p^2b^4\cos 2\delta}{(a^2-b^2)}-\frac{p^4a^2b^2}{(a^2-b^2)^3}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

bestimmt ist, so erhält man z. B. die Angriffslinie der durch Beschleunigung hervorgerufenen Zusatzkraft, in der Form

$$\left.\begin{aligned} x\cos\delta\left[2b+\frac{a^2b}{a^2-b^2}\left(1+\frac{p^2}{a^2-b^2}\right)\right]+y\sin\delta\left[2b+\frac{a^2b}{a^2-b^2}\left(1-\frac{p^2}{a^2-b^2}\right)\right]&\\ =-2\left[a^2-\frac{p^2b^4\cos 2\delta}{(a^2-b^2)^2}-\frac{p^4a^2b^2}{(a^2-b^2)^3}\right]& \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (80).$$

Wir wollen in diesem Zusammenhange auf weitere Einzelheiten verzichten und nur noch den Spezialfall der kreisförmig gebogenen Platte $\left(\delta=\frac{\pi}{2},\ p^2=a^2-b^2\right)$ kurz erwähnen, bei dem die Impulsgrößen die Werte

$$J_r=2\pi\varrho\omega p^2b;\qquad L_r=2\pi\varrho\omega p^4$$

annehmen. Da ferner die letzte Gleichung

$$y=-\frac{p^2}{b}$$

liefert, d. h. die Ordinate des Mittelpunktes des Kreisbogens in bezug auf das in den Profilmittelpunkt als Drehpunkt verlegte Achsensystem, so ergibt sich, daß die Kraft durch das Zentrum des Kreisbogens hindurchgeht und der Sehne des Kreises parallel gerichtet ist.

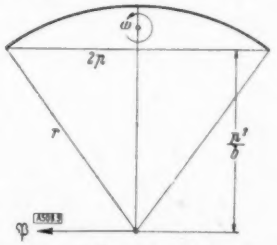


Bild 9. Zur beschleunigten Rotation einer kreisförmig gekrümmten Platte.

8. Kleine Drehschwingungen des Tragflügels um die Querachse.

Um schließlich die Wirkung kleiner Drehschwingungen des Flügels um eine mittlere Lage des Anstellwinkels zu untersuchen, setzen wir

$$\omega=\omega_0\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

und bestimmen die über die Zeitperiode T der Schwingungen genommenen Mittelwerte aller Ausdrücke, welche die Geschwindigkeit und Beschleunigung enthalten. Dabei geben nur die quadratischen Glieder von Null verschiedene Beträge. Wegen

$$\frac{1}{T}\int_0^T\omega^2\,\mathrm{d}t=\frac{\omega_0^2}{T}\int_0^T\sin^2 2\pi\frac{t}{T}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\omega_0^2$$

ergeben sich dann folgende Beiwerte für Auftrieb und Widerstand

$$\left.\begin{aligned} c_a &= 2\pi\frac{a}{p}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2\left[p\,\frac{3a^2b-2b^3}{(a^2-b^2)^2}\sin(\delta+\alpha)-\frac{p^3a^2b}{(a^2-b^2)^3}\sin(\delta-\alpha)\right]\\ &\sim 2\pi\frac{a}{p}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2\varepsilon\,[2\cos\delta\cos\alpha+\sin\delta\sin\alpha]\,,\\ c_w &= \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2\left[p\,\frac{3a^2b-2b^3}{(a^2-b^2)^2}\cos(\delta+\alpha)+\frac{p^3a^2b}{(a^2-b^2)^3}\cos(\delta-\alpha)\right]\\ &\sim \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2\varepsilon\,(2\cos\alpha\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)\,,\\ c'_m &= (c'_m)_t-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2\cdot\varepsilon\sin\delta\,. \end{aligned}\right\}\qquad(81).$$

Man sieht, daß kleine Schwingungen im allgemeinen eine Verkleinerung des Auftriebs und eine Vergrößerung des Widerstandes zur Folge haben. Wenn man bedenkt, daß Schwingungen dieser Art als Begleiterscheinung der periodisch sich abspielenden Wirbelablösung auf der Hinterseite des Flügels vorkommen, so ist damit zum mindesten eine gewisse Seite des Widerstandes theoretisch verständlich gemacht oder eine theoretische Bestätigung dafür gegeben, daß der Formwiderstand durch die oszillatorische Beschaffenheit der Strömung nicht unwesentlich mitbedingt ist. Eine Unstimmigkeit gegenüber der Erfahrung besteht allerdings darin, daß die Widerstandszahl c_w unter den gegebenen Voraussetzungen mit dem Anstellwinkel nur wenig veränderlich ist und mit wachsendem α sogar etwas abnimmt. Man muß aber dabei bedenken, daß die Kräfte auch noch durch die Lage des Drehpunktes bestimmt werden, der in unserem Falle in den Profilmittelpunkt verlegt wurde. Eine weitergehende Verfolgung der Theorie müßte auch diese Abhängigkeit in Rechnung stellen, um eine weitere Annäherung an die wirklichen Verhältnisse zu erreichen. Als physikalisch maßgebende Größe geht ferner das Verhältnis der Drehgeschwindigkeit zur Bewegungsgeschwindigkeit in die Formeln ein, das natürlich empirisch ermittelt werden müßte, um eine Prüfung der abgeleiteten Ergebnisse zu ermöglichen. Es scheint, daß diese Schwingungsfrequenz für die vollständige Erfassung der Kräfte am Tragflügel nicht entbehrt werden kann.

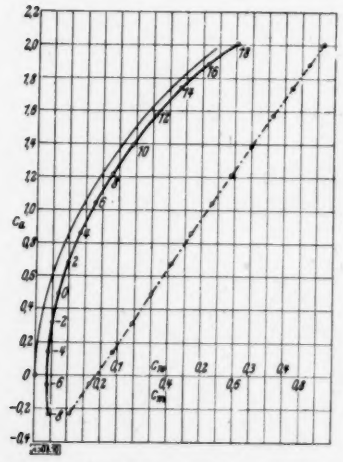


Bild 10. Polardiagramm eines Tragflügels mit $\Lambda=6$, $\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2=0{,}05$.

Der besseren Übersicht halber haben wir noch das Polardiagramm für einen Joukowski-schen Tragflügel mit den Abmessungen $a=5$, $b=0{,}71$, $\delta=\frac{\pi}{4}$ aufgezeichnet, Bild 10. Dabei wurde das Geschwindigkeitsverhältnis $\left(\frac{\omega_0 p}{v_0}\right)^2=0{,}05$ zugrunde gelegt und außerdem noch der Einfluß der endlichen Länge des Flügels, d. h. der induzierte Widerstand

$$c_{wi}=\frac{c_a^2}{\pi\Lambda}$$

und die dadurch hervorgerufene Verkleinerung des c_a-Wertes berücksichtigt, der für die Flügelstreckung Λ bei Vernachlässigung des Einflusses der Drehung den Wert

$$c_a=\frac{2\pi\sin(\alpha+\beta)}{1+\frac{2}{\Lambda}\cos(\alpha+\beta)}$$

annimmt[6]). Auch die mit der Messung gut übereinstimmende Abhängigkeit der Momentenzahl c_m von der Auftriebszahl c_a ist dem Polardiagramm hinzugefügt worden. Wegen der Unbestimmtheit, namentlich des Quotienten $\frac{\omega_0 p}{v_0}$ ist natürlich nur ein qualitativer Vergleich mit den Daten der Messung zulässig. 508

[6]) Vgl. Wilhelm Müller: Mathematische Strömungslehre, S. 166. Berlin 1928.

Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration[1]).

Von *H. Neuber* in Braunschweig.

Ausgehend vom Kräftegleichgewicht stellt Verfasser unter Anwendung des absoluten Differentialkalküls die Grundgleichungen der Stabilitätstheorie in beliebigen krummlinigen Koordinaten auf. Der Vorteil dieser Ableitung ist der, daß zunächst keine Voraussetzungen über das Formänderungsgesetz gemacht zu werden brauchen und daß die Größen, denen auch bei endlichen Verschiebungen Tensoreigenschaft zukommt, klar als Tensoren hervortreten. Das Integral der Grundgleichungen des anisotropen Kontinuums bei stationärer Vorspannung wird auf eine vektorielle Spannungsfunktion zurückgeführt, die einer Differentialgleichung sechster Ordnung genügt. Im Falle der Isotropie gelingt die Zurückführung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. Einführung.

In den seitherigen Darstellungen der Stabilitätstheorie [1 bis 8][2]) werden zur Aufstellung der Grundgleichungen kartesische Koordinaten verwandt. In vorliegender Arbeit wird diese Theorie durch Anwendung des absoluten Differentialkalküls in beliebigen krummlinigen Koordinaten hergeleitet. Die Darstellung bietet den Vorteil, daß jene Größen, denen auch bei endlichen Verschiebungen noch Tensoreigenschaft zukommt, besonders klar als Tensoren hervortreten. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber früheren Darstellungen besteht vor allem darin, daß die Gleichgewichtsbedingungen nicht aus dem Energieprinzip, sondern allein aus dem Kräftegleichgewicht hergeleitet werden, d. h. noch ohne eine Voraussetzung über das Formänderungsgesetz bzw. das elastische Potential. Nach Elimination des zusätzlichen, durch die elastische Deformation bedingten Spannungstensors mit Hilfe der Spannungs-Dehnungsgleichungen ergibt sich für den Verschiebungsvektor der anisotropen Kontinua ein neues Gleichungssystem, welches einer Modifikation des anisotropen Elastizitätsgesetzes entspricht, derart, daß an Stelle des ursprünglichen Elastizitätstensors ein neuer Tensor tritt, der von den Vorspannungen abhängt. Das allgemeine Integral der Grundgleichungen bei stationären Vorspannungen wird auf eine vektorielle Spannungsfunktion zurückgeführt, welche einer Differentialgleichung sechster Ordnung genügt. Im Falle des isotropen Kontinuums läßt sich zeigen, wie der gleiche Ansatz, der vom Verfasser in der gewöhnlichen räumlichen Elastizitätstheorie mit Erfolg angewandt wurde, zu einem einfachen Lösungsweg führt. Hierbei treten Differentialgleichungen von nur zweiter Ordnung auf.

2. Bezeichnungen und geometrische Grundbeziehungen.

Es mögen mit $x=\overline{x}^1$, $y=\overline{x}^2$, $z=\overline{x}^3$, allgemein $\overline{x}^k$ orthogonale kartesische Koordinaten gekennzeichnet sein, und es mögen römische Indizes stets auf kartesische Koordinaten hinweisen. Die Größen $\overline{x}^k$ sind als differenzierbare Funktionen der neuen krummlinigen Koordinaten x^1, x^2, x^3, allgemein x^λ vorausgesetzt, und es mögen griechische Indizes stets auf diese krummlinigen Koordinaten hinweisen. Jeder, die Komponenten eines Vektors in kartesischen Koordinaten darstellenden Größe $A^k=A_k$ ist in den neuen Koordinaten die Größe

$$A_\lambda=\sum_k A_k\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zugeordnet, die auch kurz als Vektor oder Tensor erster Stufe bezeichnet werden kann. Diese Art der Unterscheidung der kartesischen Ausgangskoordinaten von den allgemeinen Koordinaten weicht zwar von der üblichen Schreibweise ab, hat aber bei der Differentiation gewisse Vorteile, insofern als kartesische Vektoren für die neuen Koordinaten wie Invarianten behandelt werden. Im übrigen gelten die bekannten Bezeichnungen (vgl. z. B. Levi-Civita [9]). Wird zur Abkürzung

$$\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^\lambda}=c_\lambda^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

geschrieben, so bilden allgemein die Größen $B_{\lambda\mu}$, die sich entsprechend der Beziehung

[1]) Vortrag auf der Tagung der Mathematiker-Vereinigung in Würzburg 1943.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit. Während der Drucklegung erhielt ich Kenntnis von einer Arbeit von E. A. Deuker (Deutsche Math. Bd. 5 (1940), S. 546 bis 562), in welcher bereits allgemeine Koordinaten verwandt werden. Das Problem wird dort durch Einführung eines Hilfsparameters als Variationsaufgabe dargestellt. Die Variation ist jedoch nicht allgemein ausgeführt, sodaß die Grundgleichungen nicht explizit erscheinen. Auch ist die Integration dort noch nicht behandelt.

$$B_{\lambda\mu} = \sum_{k,l} B_{kl}\, c_\lambda^k\, c_\mu^l \quad \ldots \quad (3)$$

aus den Größen B_{kl} ergeben, einen „Tensor“ zweiter Stufe. Entsprechendes gilt für Tensoren höherer Stufe. Der für die Längenbestimmung maßgebliche metrische Tensor wird

$$g_{\lambda\mu} = \sum_k c_\lambda^k\, c_\mu^l \quad \ldots \quad (4)$$

mit den kartesischen Komponenten $g_{kl} = \delta_l^k$. Hierbei ist

$$\delta_l^k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = l \\ 0, & \text{wenn } k \neq l \end{cases} \quad \ldots \quad (5)$$

das Kroneckersche Symbol. Bildet man ferner in der Determinante der c_λ^k die Unterdeterminante von c_λ^k und dividiert sie durch die Determinante $|c_\lambda^k|$, so ergibt sich die Größe

$$c_k^\lambda = \frac{1}{2\,|c_\lambda^k|} \sum_{l,m,\alpha,\beta} e_{klm}\, e^{\lambda\alpha\beta}\, c_\alpha^l\, c_\beta^m \quad \ldots \quad (6).$$

Für die hierbei auftretenden Hilfsgrößen e_{klm} gilt

$$e_{klm} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } k, l, m \text{ eine zyklische Form bilden;} \\ -1 \quad \text{bei ungerader Permutation der Indizes gegenüber oben;} \\ 0, \text{ wenn mindestens zwei Indizes zusammenfallen.} \end{cases} \quad \ldots \quad (7).$$

Das Entsprechende gilt für die Größen $e^{\lambda\alpha\beta}$. Für die Determinante folgt

$$|c_\lambda^k| = \sum_{k,l,m,\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{6}\, e_{klm}\, e^{\alpha\beta\gamma}\, c_\alpha^k\, c_\beta^l\, c_\gamma^m \quad \ldots \quad (8).$$

Nach der Determinantentheorie gilt, wenn nunmehr stets bei Summation über einen Index, der einmal oben und einmal unten steht, das Summenzeichen weggelassen wird:

$$c_\alpha^k\, c_k^\beta = \delta_\alpha^\beta, \qquad c_\alpha^k\, c_l^\alpha = \delta_l^k \quad \text{usw.} \quad \ldots \quad (9).$$

Setzt man ferner

$$|g_{\alpha\beta}| = \frac{1}{6}\, e^{\alpha\beta\gamma}\, e^{\lambda\mu\nu}\, g_{\alpha\lambda}\, g_{\beta\mu}\, g_{\gamma\nu} = g \quad \ldots \quad (10)$$

und

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\,g}\, e^{\alpha\gamma\delta}\, e^{\beta\mu\nu}\, g_{\gamma\mu}\, g_{\delta\nu} \quad \ldots \quad (11),$$

so folgt

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\gamma} = \delta_\beta^\gamma \quad \text{usw.} \quad \ldots \quad (12),$$

d. h. auch die $g^{\alpha\beta}$ bilden einen Tensor. Ferner wird

$$|c_\lambda^k| = \sqrt{g}, \qquad |c_k^\lambda| = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad \ldots \quad (13)$$

und die Größen c_k^λ, δ_l^α, sowie

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \quad \text{und} \quad \sqrt{g}\, e_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad \ldots \quad (14)$$

stellen sämtlich Tensoren dar (hierbei muß allerdings verabredet werden, daß das neue Koordinatensystem in demselben Sinn dreht wie das kartesische).

Die Größen $B_{\lambda\mu}$ entsprechend Gl. (3) sind kovariante Tensorkomponenten, während die zugeordneten Größen

$$B^{\alpha\beta} = B^{kl}\, c_k^\alpha\, c_l^\beta \quad \ldots \quad (15)$$

die kontravarianten Komponenten angeben. Es folgt

$$B^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda}\, g^{\beta\mu}\, B_{\lambda\mu} \quad \ldots \quad (16).$$

Bei Differentiation einer Invariante c entsteht ein Vektor

$$\frac{\partial c}{\partial x^k} = C_{,k} = c_k^\alpha\, C_{,\alpha} \quad \ldots \quad (17).$$

Bei Differentiation eines Vektors A_k entsteht der Tensor

$$A_{k,l} = \frac{\partial A_k}{\partial \bar{x}^l} = c_l^\beta A_{k,\beta} = e_l^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(c_k^\alpha A_\alpha\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die entsprechenden krummlinigen Komponenten dieses Tensors sind mithin

$$A_{\alpha,\beta} = c_\alpha^k c_\beta^l A_{k,l} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Hierbei ist

$$c_\alpha^k \frac{\partial c_k^\gamma}{\partial x^\beta} = -c_k^\gamma \frac{\partial c_\alpha^k}{\partial x^\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

gesetzt (entsprechend dem Christoffel-Symbol zweiter Art).

Allgemein folgt als Regel der kovarianten Differentiation, daß die Operationen

$$B_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda B_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda B_{\alpha\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

$$B^{\alpha\beta}_{\ \ ,\gamma} = \frac{\partial B^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha B^{\lambda\beta} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\beta B^{\alpha\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

usw. stets neue Tensoren liefern; ihre kontravarianten Komponenten sind

$$B_{\alpha\beta}|^\gamma = g^{\gamma\lambda} B_{\alpha\beta,\lambda}, \qquad B^{\alpha\beta}|^\gamma = B^{\alpha\beta}_{\ \ ,\lambda} g^{\gamma\lambda} \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Weiter folgen hieraus die Ricci-Beziehungen

$$c^k_{\alpha,\beta} = c^\alpha_{k,\beta} = g_{\alpha\beta,\gamma} = g^{\alpha\beta}_{\ \ ,\gamma} = g^{\alpha\beta}|^\gamma = g_{\alpha\beta}|^\gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

3. Spannungstensor und Gleichgewichtsbedingungen.

Werden die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z mit t_{11}, t_{22}, t_{33}, die Schubspannungen τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} mit t_{23}, t_{31}, t_{12} gekennzeichnet, so repräsentiert allgemein t_{kl} die Komponenten des Spannungstensors in kartesischen Koordinaten. Die zugehörigen kovarianten Komponenten im krummlinigen System sind dann

$$t_{\lambda\mu} = t_{kl} c_\lambda^k c_\mu^l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

bzw. die kontravarianten Komponenten

$$t^{\lambda\mu} = t^{kl} c_k^\lambda c_l^\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen gegenüber einer Verschiebung in x-Richtung

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

gehen in die Form

$$t^{kl}_{\ \ ,k} + P^l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

über. Hierbei ist P^l der Vektor der Massenkraft. Entsprechend ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen in den neuen Koordinaten

$$t^{\lambda\mu}_{\ \ ,\lambda} + P^\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

wobei P^μ aus

$$P^\mu = P^k c_k^\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

zu bestimmen ist. Die Gl. (29) lauten ausführlich

$$\frac{\partial t^{\lambda\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda t^{\nu\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu t^{\lambda\nu} + P^\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Eine weitere Bedingung ist das Gleichgewicht der Spannungen gegenüber einer Drehung. In kartesischen Koordinaten folgt hieraus die bekannte Symmetrieeigenschaft $t^{kl} = t^{lk}$ des Spannungstensors, die infolgedessen auch für $t^{\lambda\mu}$ gilt. Zur Darstellung der physikalischen Spannungskomponenten $\tau^{\lambda\mu}$, die nicht mit den Größen $t^{\lambda\mu}$ identisch sind, muß der an einer Fläche $x^\lambda = \text{konst.}$ wirkende Spannungsvektor ermittelt werden. Denkt man sich diese Fläche als vierte Seitenfläche eines Elementartetraeders, dessen übrige Seiten durch Flächen $\bar{x}^k = \text{konst.}$ gebildet werden, so gilt die Gleichgewichtsbedingung für die resultierende Kraft in der $\bar{x}^l$-Richtung

$$\sum_\mu \tau^{\lambda\mu} \frac{c_\mu^l}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} = \sum_k t^{kl} \frac{c_k^\lambda}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Hierbei stellt $\tau^{\lambda\mu}$ die μ-Komponente des an der Fläche $x^\lambda = \text{konst.}$ angreifenden physikalischen Spannungsvektors dar. $c_\mu^l/\sqrt{g_{\mu\mu}}$ ist Richtungskosinus der μ-Richtung gegenüber der $\bar{x}^l$-Richtung, während $c_k^\lambda/\sqrt{g^{\lambda\lambda}}$ Richtungskosinus der Normalen zur Fläche $x^\lambda = \text{konst.}$ gegenüber der $\bar{x}^k$-Richtung darstellt. Durch Multiplikation mit c_l^ν und Summation über l folgt

$$\tau^{\lambda\nu} = \sqrt{\frac{g_{\nu\nu}}{g^{\lambda\lambda}}}\, t^{\lambda\nu} \quad \ldots \quad (33).$$

Die Größen $\tau^{\lambda\nu}$ sind mithin kein Tensor. Die Normalspannung wird

$$\sigma_\lambda = \frac{t^{\lambda\lambda}}{g^{\lambda\lambda}} \quad \ldots \quad (34),$$

während die gesamte, in die μ-Richtung fallende Komponente der Schubspannung die Größe

$$\overset{*}{t}_{\lambda\mu} = \sum_\nu \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g^{\lambda\lambda}\, g_{\nu\nu}}}\, t^{\lambda\nu} \quad \ldots \quad (35)$$

annimmt. Sind längs der Oberfläche des Körpers die auf die Flächeneinheit bezogenen Kräfte f^l vorgegeben, so lauten die Randbedingungen, wenn die Oberfläche durch $x^\lambda = \text{konst.}$ dargestellt wird:

$$t^{\lambda\mu}\, c_\mu^l \frac{1}{\sqrt{g^{\lambda\lambda}}} = f^l \quad \ldots \quad (36).$$

4. Geometrie des deformierten Körpers.

Nach der Deformation gehen die Koordinaten $\bar{x}^k$ über in

$$\bar{x}'^k = \bar{x}^k + V^k \quad \ldots \quad (37).$$

Die Größen V^k stellen die kartesischen Komponenten des elastischen Verschiebungsvektors dar. Werden entsprechend alle neuen Größen durch einen Strich gekennzeichnet, so folgen die Beziehungen

$$c'^k_\lambda = c^k_\lambda + V^k_\lambda = c^k_\lambda + c^k_\nu\, V^\nu_{\cdot\cdot,\lambda} \quad \ldots \quad (38),$$

$$g'_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + V_{\lambda,\mu} + V_{\mu,\lambda} + V^\nu_{\cdot\cdot,\mu}\, V_{\nu,\lambda} \quad \ldots \quad (39),$$

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g}\,(1 + V^\nu_{\cdot\cdot,\nu} + \text{Glieder höherer Ordnung}) \quad \ldots \quad (40).$$

Ebenso lassen sich alle weiteren Größen auf die entsprechenden Größen des Ausgangssystems und die Ableitungen des Verschiebungsvektors zurückführen. Der Verschiebungsvektor V_λ und seine Ableitungen stellen im Rahmen der nachstehend behandelten Problemstellung für das elastische Kontinuum bereits Größen zweiter Ordnung dar, da die Komponenten des Vorspannungstensors $T^{\lambda\mu}$ als Größen erster Ordnung anzusehen sind. Bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung ergibt sich

$$g'_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + 2\,\mathrm{d}_{\lambda\mu} \quad \ldots \quad (41).$$

Hierbei ist

$$d_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,(V_{\lambda,\mu} + V_{\mu,\lambda}) \quad \ldots \quad (42)$$

der Verzerrungstensor. Weiter erhält man

$$c'^\lambda_k = c^\lambda_k - V^\lambda_{\cdot\cdot,\nu}\, c^\nu_k, \qquad g'^{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu} - 2\,d^{\lambda\mu} \quad \ldots \quad (43),$$

$$\Gamma'^{\,\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + V^\lambda_{\cdot\cdot,\mu\nu} \quad \ldots \quad (44).$$

Die zweiten Ableitungen des Verschiebungsvektors lassen sich entsprechend der Beziehung

$$V^\lambda_{\cdot\cdot,\mu\nu} = d^\lambda_{\mu,\nu} + d^\lambda_{\nu,\mu} - d_{\mu\nu}|^\lambda \quad \ldots \quad (45),$$

die aus Gl. (42) hervorgeht, stets auf die ersten Ableitungen des Verzerrungstensors zurückführen. Wird die kovariante Ableitung im deformierten System mit einem * gekennzeichnet, so folgt

$$c_{\bullet\,\alpha} = c_{,\alpha}, \qquad A_{\alpha\bullet,\beta} = A_{\alpha,\beta} - V^\gamma_{\cdot\cdot,\alpha\beta}\, A_\gamma \quad \ldots \quad (46),$$

$$A^\alpha_{\cdot\bullet,\beta} = A^\alpha_{\cdot\cdot,\beta} + V^\alpha_{\gamma,\beta}\, A^\gamma \text{ usw.} \quad \ldots \quad (47).$$

5. Gleichgewicht des deformierten Körpers.

Ist $K^{\lambda\mu}$ der Spannungstensor des deformierten Körpers, d. h.

$$K^{\lambda\mu} = K^{lm}\, c'^{\lambda}_{l}\, c'^{\mu}_{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

und ist $P^{\mu} + p^{\mu}$ der Vektor der Massenkraft nach der Deformation, so folgen als Gleichgewichtsbedingungen aus dem Vorhergehenden außer der Symmetrieeigenschaft $K^{\lambda\mu} = K^{\mu\lambda}$ die Beziehungen

$$K^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + P^{\mu} + p^{\mu} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

bzw.

$$K^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + V^{\lambda}_{\ldots,\lambda\nu} K^{\nu\mu} + V^{\mu}_{\ldots,\lambda\nu} K^{\lambda\nu} + P^{\mu} + p^{\mu} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50).$$

Die so gewonnenen Gleichungen bilden die Grundlage zur Behandlung des Stabilitätsproblems. Waren vor Eintreten der Verschiebungen V^{λ} bereits Vorspannungen $T^{\lambda\mu}$ vorhanden, so setzt sich der Spannungstensor $K^{\lambda\mu}$ aus einem Tensor $\overline{T}^{\lambda\mu}$, der allein mit den Vorspannungen in Zusammenhang steht (Größen erster Ordnung), und einem durch die Deformation bedingten Tensor $t^{\lambda\mu}$ (Größen zweiter Ordnung) zusammen:

$$K^{\lambda\mu} = t^{\lambda\mu} + \overline{T}^{\lambda\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51).$$

Hierbei stellt sowohl $\overline{T}^{\lambda\mu}$ als auch $t^{\lambda\mu}$ einen symmetrischen Tensor dar. Zur Feststellung des Zusammenhanges von $\overline{T}^{\lambda\mu}$ mit dem Vorspannungstensor $T^{\lambda\mu}$ muß auf den physikalischen Vorgang Bezug genommen werden[3]). Die an einer Fläche $x^1 = \text{konst.}$ tatsächlich wirkende Kraft in k-Richtung ist vor der Deformation

$$\sum_{\mu} T^{1\mu} \sqrt{g}\, c^{k}_{\mu}\, dx^2\, dx^3 \quad \left(\text{Flächeninhalt } \sqrt{g\, g^{11}}\, dx^2\, dx^3\right)$$

und nach der Deformation

$$\sum_{\mu} \overline{T}^{1\mu} \sqrt{g'}\, c'^{k}_{\mu}\, dx^2\, dx^3.$$

Die projektive Operation, die durch die Multiplikation mit c^{k}_{μ} gegeben ist, bedeutet zwar die Bildung der exakten k-Komponente; in Wirklichkeit hat aber das Material in der näheren Umgebung des betrachteten Punktes insgesamt, d. h. von der Verzerrung abgesehen, eine Drehung vollführt (d. h. auch als starrer Körper), die durch den schiefsymmetrischen Tensor

$$\omega_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(V_{\lambda,\mu} - V_{\mu,\lambda}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

gegeben ist. Die Ableitungen dieses Tensors lassen sich übrigens restlos auf die Ableitungen des Verzerrungstensors zurückführen; es folgt nämlich mit Bezug auf Gl. (45):

$$\omega_{\lambda\mu,\nu} = d_{\lambda\nu,\mu} - d_{\mu\nu,\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53).$$

Werden die oben gekennzeichneten Kraftgrößen nicht unmittelbar als einander gleich angesehen, sondern erst nach Elimination der in c'^{k}_{μ} enthaltenen Drehung, so ist an Stelle von $c'^{k}_{\mu} = c^{k}_{\mu} + c^{k}_{\nu}\left(d^{\nu}_{\mu} + \omega^{\nu}_{\cdot\mu}\right)$ der Tensor

$$c'^{k}_{\mu} - c^{k}_{\nu}\, \omega^{\nu}_{\cdot\mu} = c^{k}_{\mu} + c^{k}_{\nu}\, d^{\nu}_{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54),$$

der nur noch eine reine Verzerrung enthält, zu setzen. Dieser Gedankengang führt, wenn zunächst ein Tensor $\overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}$ an Stelle von $\overline{T}^{\lambda\mu}$ eingeführt wird, zu einer Beziehung von der Form

$$\left.\begin{aligned} T^{\lambda\mu}\sqrt{g}\, c^{k}_{\mu} &= \overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}\sqrt{g'}\left(c^{k}_{\mu} + c^{k}_{\nu}\, d^{\nu}_{\mu}\right) \\ \text{bzw.} \qquad T^{\lambda\mu} &= \overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}\left(1 + d^{\nu}_{\nu}\right) + \overset{+}{T}{}^{\lambda\nu}\, d^{\mu}_{\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55).$$

---

[3]) Die exakte Berechnung des Tensors $\overline{T}^{\lambda\mu}$ würde eine Bezugnahme auf die mit dem Vorspannungstensor durch das Formänderungsgesetz verknüpfte Vordeformation erforderlich machen. Eine solche Rechnung würde eine Erweiterung der Ausgangsgleichungen auf Größen dritter Ordnung erforderlich machen, da der metrische Tensor des Ausgangszustandes Größen erster Ordnung darstellt und jener der Vordeformation bereits Größen zweiter Ordnung enthalten würde. Zugleich wäre eine Erweiterung des Elastizitätsgesetzes auf Größen zweiter Ordnung erforderlich, wobei entsprechende Aussagen kaum durch experimentelle Befunde sichergestellt werden können. Bei Umgehung dieser Schwierigkeiten muß über das Verhalten des Vorspannungstensors bei der Deformation eine besondere Beziehung eingeschaltet werden, für die ich nachstehend in Anlehnung an das physikalisch zu erwartende Verhalten zwei Formulierungen angebe.

Die Auflösung nach $\overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}$ liefert im Rahmen der Theorie zweiter Ordnung

$$\overset{+}{T}{}^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu}\left(1 - d^{\nu}_{\nu}\right) - T^{\lambda\nu}\, d^{\mu}_{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56).$$

Man erkennt, daß der Tensor $\overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}$ unsymmetrisch ist, also nicht direkt mit $\overline{T}^{\lambda\mu}$ identifiziert werden kann. Setzt man seinen rein symmetrischen Anteil gleich $\overline{T}^{\lambda\mu}$, so ergibt sich

$$\overline{T}^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu}\left(1 - d^{\nu}_{\nu}\right) - \frac{1}{2}\left(T^{\lambda\nu}\, d^{\mu}_{\nu} + T^{\nu\mu}\, d^{\lambda}_{\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Gl. (51) liefert nunmehr

$$K^{\lambda\mu} = t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}\left(1 - d^{\nu}_{\nu}\right) - \frac{1}{2}\left(T^{\lambda\nu}\, d^{\mu}_{\nu} + T^{\nu\mu}\, d^{\lambda}_{\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen (50) gehen über in

$$t^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + T^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} - \frac{1}{2}\left(T^{\lambda\nu} d^{\mu}_{\nu} + T^{\mu\nu} d^{\lambda}_{\nu}\right)_{,\lambda} + V^{\mu}_{\ldots,\lambda\nu}\, T^{\lambda\nu} - d^{\nu}_{\nu}\, T^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + P^{\mu} + p^{\mu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Hierbei ist davon Gebrauch gemacht, daß $t^{\lambda\mu}$ von derselben Ordnung klein ist wie $V^{\lambda}{}_{|}{}^{\mu}$. Wird ferner beachtet, daß sich der Vorspannungstensor $T^{\lambda\mu}$ mit der ursprünglichen Massenkraft P^{μ} im Gleichgewicht befindet, d. h.

$$T^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + P^{\mu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

erfüllt ist, so läßt sich Gl. (60) auf die Form

$$t^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + T^{\lambda\nu}\, V^{\mu}_{\ldots,\lambda\nu} + p^{\mu} - \frac{1}{2}\left(T^{\lambda\nu}\, d^{\mu}_{\nu} + T^{\mu\nu}\, d^{\lambda}_{\nu}\right)_{,\lambda} + P^{\mu}\, d^{\nu}_{\nu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

bringen. Werden alle Formänderungsgrößen durch die Ableitungen des Verschiebungsvektors ausgedrückt, so ergibt sich folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$t^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + T^{\lambda\nu}\, V^{\mu}_{\ldots,\lambda\nu} + p^{\mu} - \frac{1}{4}\left[\left(V^{\mu}_{\ldots,\nu} + V_{\nu}{}^{|\mu}\right) T^{\lambda\nu} + \left(V^{\lambda}_{\ldots,\nu} + V_{\nu}{}^{|\lambda}\right) T^{\mu\nu}\right]_{,\lambda} + P^{\mu}\, d^{\nu}_{\nu} = 0 \quad . \quad . \quad (62).$$

Werden andererseits die Ableitungen des Verschiebungsvektors durch Ableitungen des Verzerrungstensors (Gl. (45)) ausgedrückt, so ergibt sich

$$t^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + T^{\lambda\nu}\left(2\, d^{\mu}_{\lambda,\nu} - d_{\lambda\nu}{}^{|\mu}\right) - \frac{1}{2}\left(T^{\lambda\nu} d^{\mu}_{\nu} + T^{\mu\nu} d^{\lambda}_{\nu}\right)_{,\lambda} + p^{\mu} + P^{\mu}\, d^{\nu}_{\nu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Den so gewonnenen Beziehungen liegt die Beziehung (58) zugrunde, welche streng genommen heuristischen Charakter hat. Nachstehend soll zugleich eine andere Auffassung erörtert werden, welche ebenfalls nahe liegt.

Betrachtet man die Komponenten des Spannungsvektors vor und nach der Deformation, so kann mit der Verzerrung des Materials auch eine gewisse Verzerrung des Vorspannungstensors angenommen werden. Die einfachste Vorstellung wäre jene, wonach die Komponenten des an der Fläche $x^{\lambda} = \text{konst}$ wirkenden Spannungsvektors dieselbe Verzerrung erfahren wie die Komponenten des Linienelementes, d. h.

$$T^{\lambda\mu}\sqrt{g}\, c^{k}_{\mu} : d\,\overline{x}^{k} = \overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}\sqrt{g'}\, c'^{k}_{\mu} : d\,\overline{x}'^{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64).$$

Diese Beziehungen verlangen wegen $d\,\overline{x}^{k} = c^{k}_{\mu}\, dx^{\mu}$, $d\,\overline{x}'^{k} = c'^{k}_{\mu}\, dx^{\mu}$

$$T^{\lambda\mu}\sqrt{g} = \overset{+}{T}{}^{\lambda\mu}\sqrt{g'} \quad \text{oder} \quad \overset{+}{T}{}^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu}\left(1 - d^{\nu}_{\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Dieser neue Tensor ist von vornherein symmetrisch und kann daher unmittelbar mit $\overline{T}^{\lambda\mu}$ identifiziert werden. Gl. (51) liefert dann

$$K^{\lambda\mu} = t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}\left(1 - d^{\nu}_{\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen (50) lauten mit Rücksicht auf Gl. (60)

$$t^{\lambda\mu}_{\ldots,\lambda} + V^{\mu}_{\ldots,\lambda\nu}\, T^{\lambda\nu} + p^{\mu} + P^{\mu}\, d^{\nu}_{\nu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

bzw.

$$t^{\mu\,\lambda}_{\ldots,\lambda} + \left(2\, d^{\mu}_{\lambda,\nu} - d_{\lambda\nu}{}^{|\mu}\right) T^{\lambda\nu} + p^{\mu} + P^{\mu}\, d^{\nu}_{\nu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68).$$

Im Falle der Isotropie besitzen diese Gleichungen gewisse rechnerische Vorteile gegenüber den Gl. (63) und (64), wie im neunten Abschnitt gezeigt wird. Der Unterschied beider Gleichungssysteme erstreckt sich meist auf Glieder, die nur mit kleinen Verzerrungsanteilen in

Zusammenhang stehen und kaum wesentlich werden. Die Gl. (63) entsprechen formal einem von Biot [6] aufgestellten Gleichungssystem. Biot benutzte jedoch für den Zusammenhang der Ableitungen des Verzerrungstensors mit jenen des Drehungstensors nicht alle geometrischen Beziehungen, sondern nur einen Teil (jene, die aus Gl. (53) in kartesischen Koordinaten hervorgehen, wenn zwei Indizes zusammenfallen), so daß bei seinen Endgleichungen noch Verzerrungs- und Drehungstensor gemeinsam auftreten. Die hier aufgestellten Gl. (63) und (68) stellen daher auch für kartesische Koordinaten eine neue Formulierung dar. Die Beziehungen (67) sind andererseits den von Trefftz [3] verwendeten Gleichungen ähnlich, ohne daß dort die physikalische Bedeutung in dem hier gegebenen Sinne erörtert ist. Auch erfolgte bei beiden Verfassern die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen aus dem Energieprinzip, d. h. nur indirekt nach Voraussetzung des elastischen Potentials, während die Ableitung hier allein auf dem Kräftegleichgewicht fußt. Die Existenz des elastischen Potentials wird hier erst eine Folgerung aus dem Superpositionsprinzip und der im nächsten Abschnitt behandelten Proportionalität zwischen Spannungs- und Dehnungstensor.

6. Das Elastizitätsgesetz und die Differentialgleichungen des elastischen Verschiebungsvektors.

Im Rahmen der Theorie zweiter Ordnung stellt $d_{\lambda\mu}$ unmittelbar den Verzerrungstensor dar, welcher mit dem Spannungstensor $t^{\lambda\mu}$ durch das lineare Elastizitätsgesetz verknüpft ist. Bei allgemeinem elastischen Verhalten (Anisotropie) wird diese Proportionalität durch die Koeffizienten $E^{\lambda\mu\nu\varrho}$ festgelegt, welche einen Tensor vierter Stufe bilden:

$$t^{\lambda\mu} = E^{\lambda\mu\nu\varrho}\, d_{\nu\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Entsprechend der Symmetrie des Spannungs- und Dehnungstensors gilt auch für diese Koeffizienten die Symmetrieeigenschaft

$$E^{\lambda\mu\nu\varrho} = E^{\mu\lambda\nu\varrho} = E^{\lambda\mu\varrho\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70).$$

Dem Superpositionsprinzip und damit der Existenz des elastischen Potentials entspricht ferner die weitere Symmetrieeigenschaft

$$E^{\lambda\mu\nu\varrho} = E^{\nu\varrho\lambda\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

Für das elastische Potential oder die Formänderungsenergie ergibt sich der Ausdruck

$$A = \frac{1}{2}\, t^{\lambda\mu}\, d_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\, E^{\lambda\mu\nu\varrho}\, d_{\lambda\mu}\, d_{\nu\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (63) bzw. (68) gehen hiermit über in folgende Differentialgleichungen des Verschiebungsvektors:

$$L^{\lambda\mu}[V_\lambda] + P^\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Hierbei ist $L^{\lambda\mu}[\,]$ ein tensorieller Operator, der bei Bezugnahme auf Gl. (62) folgende Form hat:

$$\left.\begin{aligned} L^{\lambda\mu}[\,] = &\left(E^{\lambda\nu\mu\varrho} + \frac{3}{4}\, g^{\lambda\mu}\, T^{\nu\varrho} - \frac{1}{4}\, T^{\lambda\nu}\, g^{\mu\varrho} - \frac{1}{4}\, g^{\lambda\varrho}\, T^{\nu\mu} - \frac{1}{4}\, g^{\nu\varrho}\, T^{\lambda\mu}\right)[\,]_{,\nu\varrho} \\ &+ \frac{1}{4}\left(g^{\lambda\mu}\, P^\nu + g^{\nu\mu}\, P^\lambda - T^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\varrho}\, g^{\lambda\varrho} - T^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot,\varrho}\, g^{\nu\varrho}\right)[\,]_{,\nu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (74\,a),$$

bzw. bei Zugrundelegung von Gl. (68):

$$L^{\lambda\mu}[\,] = (E^{\lambda\nu\mu\varrho} + g^{\lambda\mu}\, T^{\nu\varrho})[\,]_{,\nu\varrho} + g^{\lambda\nu}\, P^\mu[\,]_{,\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74\,b).$$

Mit der Einführung dieses Operators ist damit das Gleichungssystem bereits formal auf das der anisotropen Kontinua ohne Vorspannungen zurückgeführt, und es handelt sich nunmehr um die Integration partieller Differentialgleichungen, deren Koeffizienten veränderlich oder konstant sind, je nachdem die Vorspannungen veränderlich oder stationär sind.

7. Integration der Grundgleichungen für anisotropes Kontinuum mit stationären Vorspannungen.

Im Falle der stationären Vorspannungen gilt

$$T^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot,\nu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75).$$

Wird noch vorausgesetzt, daß anfänglich keine Massenkraft vorhanden ist und daß der durch die Deformation bedingte zusätzliche Massenkraftvektor p^μ eine reine Trägheitskraft repräsentiert, d. h.

$$p^{\mu} = -\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(V^{\mu}) \quad \ldots \quad (76)$$

(ϱ spezifische Masse, t Zeitkoordinate), so geht Gl. (73) über in

$$\Pi^{\lambda\mu}[V_{\mu}] = 0 \quad \ldots \quad (77),$$

wobei

$$\Pi^{\lambda\mu} = \bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho}[\,]_{,\nu\varrho} - \varrho\, g^{\lambda\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\,] \quad \ldots \quad (78)$$

bedeutet. Der hierbei neu eingeführte Tensor $\bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho}$ berechnet sich zu

$$\bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho} = E^{\lambda\nu\mu\varrho} + \frac{3}{4} g^{\lambda\mu} T^{\nu\varrho} - \frac{1}{4} g^{\mu\varrho} T^{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g^{\lambda\varrho} T^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\nu\varrho} T^{\lambda\mu} \quad \ldots \quad (79\,a)$$

bzw.

$$\bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho} = E^{\lambda\nu\mu\varrho} + g^{\lambda\mu} T^{\nu\varrho} \quad \ldots \quad (79\,b),$$

je nachdem Gl. (74a) oder (74b) zugrunde gelegt wird[4]). Hieraus folgt der Satz: Das elastische Verhalten eines anisotropen Kontinuums bei Vorspannungen entspricht einer Änderung der Anisotropie, derart daß an die Stelle des Tensors $E^{\lambda\nu\mu\varrho}$ der Tensor $\bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho}$ tritt.

Die Lösung der Gl. (77) stellt ein bereits von Herglotz [10] und Weierstraß [11] behandeltes Problem dar. In der hier gegebenen Schreibweise ergibt sich die Differentialgleichung der Komponenten des Verschiebungsvektors als Determinante der Operatoren $\Pi^{\lambda\mu}[\,]$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\, \Pi^{\alpha\lambda}\, \Pi^{\beta\mu}\, \Pi^{\gamma\nu}[V_{\varrho}] = 0 \quad \ldots \quad (80).$$

Wird eine vektorielle Spannungsfunktion X^{α} eingeführt, so liefert der Ansatz

$$V_{\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \Pi^{\beta\mu}\, \Pi^{\gamma\nu}[X^{\alpha}] \quad \ldots \quad (81)$$

Lösungen der Gl. (77), wenn X^{α} der Differentialgleichung (80) genügt, welche von sechster Ordnung ist. Es läßt sich zeigen, daß eine der drei kartesischen Komponenten der Spannungsfunktion im allgemeinen zur Darstellung der Lösung ausreicht.

8. Fortpflanzung von Störungen im anisotropen Kontinuum bei stationärer Vorspannung.

Ein aufschlußreiches Beispiel für die Beeinflussung der elastischen Eigenschaften durch Vorspannungon stellt das Verhalten gegenüber Störungen dar. Handelt es sich beispielsweise um die Ausbreitung einer ebenen Wellenfront, so gilt für den Verschiebungsvektor der Ansatz (f_l ist eine beliebige Funktion des Argumentes $a_k \bar{x}^k + c\,t$)

$$V_l = f_l(a_k \bar{x}^k + c\,t), \quad V_{\lambda} = c_{\lambda}^{l} f_l \quad \ldots \quad (82).$$

Hierbei möge a_k ein Einheitsvektor sein. Die Ausbreitung der Störung ist dann durch die zeitliche Wanderung jener Stellen im Medium charakterisiert, für welche das Argument $a_k \bar{x}^k + c\,t$ den gleichen Wert besitzt; diese Stellen liegen zu gleichen Zeiten auf einer Ebene, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit in Richtung der Normalen durch c gegeben ist. Die Differentialgleichungen (77) liefern dann

$$(\bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho}\, a_{\nu}\, a_{\varrho} - g^{\lambda\mu}\, \varrho\, c^2)\, f_l''\, c_{\lambda}^{l} = 0 \quad \ldots \quad (83).$$

Schließlich führt die Differentialgleichung (80) auf eine Beziehung, welche eine Gleichung dritten Grades für c^2 darstellt. Die für anisotrope Medien bekannte Erscheinung der Existenz von drei verschiedenen Schallgeschwindigkeiten[5]) wird daher bei Vorhandensein stationärer Vorspannungen nur insofern modifiziert, als andere Elastizitätszahlen gelten.

9. Integration der Grundgleichungen bei stationären Vorspannungen für den Sonderfall der Isotropie.

Ein Sonderfall liegt bei isotropen Medien vor. Der Tensor $E^{\lambda\mu\nu\varrho}$ hat dann die spezielle Form

$$E^{\lambda\mu\nu\varrho} = G\left[g^{\lambda\nu} g^{\mu\varrho} + g^{\mu\nu} g^{\lambda\varrho} + \frac{2}{m-2} g^{\lambda\mu} g^{\nu\varrho}\right] \quad \ldots \quad (84)$$

[4]) Hierbei ist zu beachten, daß die Symmetrieeigenschaften (70) und (71) für den neuen Tensor $\bar{E}^{\lambda\nu\mu\varrho}$ nicht mehr gelten.

[5]) Siehe z. B. Green: Cambridge Phil. Soc. Trans., Bd. 7, 1839.

(G Schubmodul, m Poissonsche Konstante), und der Tensor $\bar{E}^{\lambda\mu\nu\varrho}$ geht mit Bezug auf Gl. (79b) über in

$$\bar{E}^{\lambda\mu\nu\varrho} = G\left(g^{\lambda\nu}\,g^{\mu\varrho} + g^{\mu\nu}\,g^{\lambda\varrho} + \frac{2}{m-2}\,g^{\lambda\mu}\,g^{\nu\varrho}\right) + g^{\mu\nu}\,T^{\lambda\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

Wie nachstehend abgeleitet wird, läßt dieser Ausdruck eine besonders einfache Integration der Grundgleichungen zu. Aus den Gl. (77) und (78) ergibt sich zunächst als Differentialgleichung des Verschiebungsvektors:

$$V^{\mu}\big|^{\lambda}_{\cdot\,\lambda} + \frac{m}{m-2}\,V^{\lambda}\big|^{\mu}_{\lambda} + T^{\lambda\nu}\,V^{\mu}_{\cdot\,\lambda\nu}\cdot\frac{1}{G} - \frac{\varrho}{G}\,\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}(V^{\mu}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86).$$

Es läßt sich nämlich mit Hilfe des gleichen Ansatzes, wie er vom Verfasser [12] in der gewöhnlichen dreidimensionalen Elastizitätstheorie mit Erfolg angewandt wurde, unmittelbar ein allgemeiner Lösungsweg finden, der zu Differentialgleichungen von nur zweiter Ordnung führt. Der Ansatz lautet

$$2\,G\,V_{\lambda} = -F,_{\lambda} + \Phi_{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87).$$

Hierin stellt F eine skalare und Φ_{λ} eine vektorielle Spannungsfunktion dar. Nach Einsetzen in Gl. (86) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{-2\,m+2}{m-2}\,F\big|^{\mu\,\lambda}_{\cdot\,\cdot\,\lambda} + \Phi^{\mu}\big|^{\lambda}_{\cdot\,\lambda} + \frac{m}{m-2}\,\Phi^{\lambda}\big|^{\mu}_{\cdot\,\lambda} + \frac{1}{G}\,T^{\lambda\nu}\left(-F\big|^{\mu}_{\cdot\,\lambda\nu} + \Phi^{\mu}_{\cdot\,,\lambda\nu}\right)\\ + \frac{\varrho}{G}\,\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}(F\big|^{\mu} - \Phi^{\mu}) = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

Es werden zur kürzeren Schreibweise zweckmäßig folgende Operatoren eingeführt:

$$(\,)\big|^{\lambda}_{\cdot\,\lambda} + \frac{1}{G}\,T^{\lambda\nu}(\,),_{\lambda\nu} - \frac{\varrho}{G}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\,) = \bar{\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89),$$

$$(\,)\big|^{\lambda}_{\cdot\,\lambda} + \frac{m-2}{2\,m-2}\left[\frac{1}{G}\,T^{\lambda\nu}(\,),_{\lambda\nu} - \frac{\varrho}{G}\,\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}(\,)\right] = \bar{\bar{\Delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

Gl. (88) geht hiermit über in

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)\bar{\Delta}\,\Phi^{\mu} - 2\left(1-\frac{1}{m}\right)\bar{\bar{\Delta}}\,F\big|^{\mu} + \Phi^{\lambda}\big|^{\mu}_{\cdot\,\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Diese Vektorgleichung wird integrabel, wenn Φ^{λ} der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\bar{\Delta}\,\Phi^{\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

genügt. Die Restgleichung (91) lautet nach Integration

$$2\left(1-\frac{1}{m}\right)\bar{\bar{\Delta}}\,F = \Phi^{\lambda}\big|_{\lambda} + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93);$$

hierbei ist C_2, ebenso wie C_1 Integrationskonstante. Zur weiteren Integration wird zweckmäßig an Stelle von Φ^{λ} die Vektorfunktion X^{λ} eingeführt, entsprechend der Beziehung

$$\Phi^{\lambda} = 2\left(1-\frac{1}{m}\right)\bar{\Delta}\,X^{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94).$$

Gl. (93) ist dann wiederum integrabel und führt auf die Gleichung

$$F = \psi + X^{\lambda}_{\cdot\,\lambda} + C_1\,\bar{x}_k\,\bar{x}^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95),$$

wobei ψ der homogenen Gl. (93)

$$\bar{\bar{\Delta}}\,\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

genügt und C_1 mit C_2 durch die Beziehung

$$2\left(1-\frac{1}{m}\right)C_1\left(6 + \frac{m-2}{(m-1)\,G}\,T^{\lambda}_{\lambda}\right) = C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

verknüpft ist. Aus Gl. (92) und 94) folgt dann, daß X^λ der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\bar{\Delta}\,\bar{\Delta}\,X_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

genügt, sich daher sowohl aus Lösungen der Gl. (92), als auch der Gl. (96) zusammensetzt. Für die Bildung der Verschiebungskomponenten kommt es jedoch nur auf die ersteren an; denn Lösungen der Gl. (96) fallen bei Bildung von Φ_λ entsprechend Gl. (94) wieder heraus. Andererseits würden sie bei F gemäß Gl. (95) nur in der skalaren Form $X^\lambda{}_{,\lambda}$ auftreten, welche schon allgemein in der Funktion ψ enthalten ist. Somit kann ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit die vereinfachende Festsetzung getroffen werden, daß X_λ nur Lösungen der Gl. (92) enthält, d. h. es sei

$$\bar{\Delta}\,X_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99).$$

Diese Gleichung enthält infolge der Regeln der kovarianten Differentiation im allgemeinen nicht nur eine, sondern alle Komponenten X_λ. Daher ist es für die praktische Durchführung zweckmäßig, zuerst die kartesischen Komponenten X_k aus der analogen Gleichung

$$\bar{\Delta}\,X_k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100),$$

welche nur eine Komponente enthält, zu bestimmen und danach X_λ aus $\lambda_\lambda = c^k_\lambda X_k$ zu berechnen. Der Operator $\bar{\Delta}$ dagegen kann im neuen System geschrieben werden. Nach Kenntnis der Funktionen X_λ und ψ wird die Spannungsfunktion F gemäß Gl. (95) bestimmt, welche der Differentialgleichung

$$\bar{\Delta}\,\bar{\Delta}\,F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

genügt.

Die Verschiebungskomponenten errechnen sich dann aus

$$2\,G\,V_\lambda = -F_{,\lambda} + 2\left(1-\frac{1}{m}\right)\bar{\Delta}\,X_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102).$$

Der Spannungstensor kann dann entweder aus den Verschiebungen an Hand der Gleichungen

$$t^{\lambda\mu} = G\left(V^\lambda|^\mu + V^\mu|^\lambda + \frac{2}{m-2}\,g^{\lambda\mu}\,V^\nu{}_{,\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103),$$

welche aus (69), (42) und (84) folgen, oder direkt aus den Spannungsfunktionen, wobei die Beziehungen

$$t^{\lambda\mu} = -F|^{\lambda\mu} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\bar{\Delta}\,(X^\lambda|^\mu + X^\mu|^\lambda) + \frac{g^{\lambda\mu}}{m-2}\left(-F|^\nu{}_\nu + 2\left(1-\frac{1}{m}\right)\bar{\Delta}\,X^\nu{}_{,\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

maßgebend sind, bestimmt werden. Die Gl. (104), welche sich aus (103) nach Einsetzen der Ausdrücke (102) ergeben, erlauben noch eine Kontrolle der Rechnung durch Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen (77). Eine kurze Rechnung zeigt, daß diese in der Tat erfüllt sind.

Schrifttumverzeichnis.

[1] R. V. Southwell: Phil. Trans. Roy. Soc. (A), Bd. 213 (1913), S. 187 bis 244.
[2] C. B. Biezeno und H. Hencky: Proc. Acad. Sci., Amsterdam, Bd. 31 (1928), Nr. 6.
[3] E. Trefftz: Verh. 3. Intern. Kongr. Techn. Mech., Stockholm 1931, Bd. III, S. 44 bis 50; Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 160 bis 165.
[4] R. Ariano: R. Scuole d'ingen. Milano, Atti ricerche studi. Fasc. 18, Milano 1935.
[5] S. Timoshenko; Theory of Elastic Stability, 1936.
[6] K. Marguerre und E. Trefftz: Z. angew. Math. Mech., Bd. 17 (1937), S. 85 bis 100.
[7] M. A. Biot: Proc. 5. Intern. Congr. Appl. Mech. 1938, S. 117 bis 122; Phil. Mag., Sec. 7, Bd. 27, April 1939, S. 468 bis 489; Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1, Bd. 59 (1939), S. 104 bis 112; Z. angew. Math. Mech., Bd. 20 (1940), S. 89 bis 99.
[8] R. Kappus: Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 271 bis 285, S. 344 bis 360.
[9] T. Levi-Civita: Der absolute Differentialkalkül, Grundlehren der math. Wiss., Bd. 28, Berlin 1928.
[10] G. Herglotz: Ber. math.-phys. kl. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Bd. LXXVIII (1926), S. 41 bis 74; S. 287 bis 318; Bd. LXXX (1928), S. 69 bis 114.
[11] K. Weierstraß: Werke, Bd. 1, S. 275ff.
[12] H. Neuber: Z. angew. Math. Mech., Bd. 14 (1934), S. 203ff.; ferner Kerbspannungslehre, Berlin 1937, S. 19ff.

Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre*).

Von *Helmut Karl* in Dresden.

Unter Benutzung des Satzes vom Minimum der Formänderungsenergie und des Prinzipes von Castigliano werden obere und untere Schranken für die Größe der Biegung gekrümmter dünnwandiger Rohre gewonnen. Zunächst wird das Verfahren auf schwach gekrümmte Rohre bei Biegung in der Krümmungsebene unter der Annahme, daß die Querkontraktionszahl Null ist, angewendet. Weiter wird dann der Einfluß der Querdehnung berücksichtigt, stärker gekrümmte Röhren untersucht und die Biegung quer zur Krümmungsebene behandelt.

A. Die wichtigsten Bezeichnungen:

R = Krümmungshalbmesser,
α = Neigung eines Querschnitts gegen die lotrechte Symmetrieebene,
r = Halbmesser der Rohrwandmittelfläche,
φ = Winkel zum Punkte P der Rohrwandmittelfläche von der Symmetrieebene $v-v$ gemessen,
t = Wanddicke,
ν = Querzahl,
$\Delta\alpha$, $(\Delta\,\mathrm{d}\,\alpha)$ = Änderung des Winkels α, $(\mathrm{d}\,\alpha)$,
$\lambda = R\cdot t/r^2$,
$\Lambda = R\cdot t/r^2\cdot\sqrt{1-\nu^2}$,
$\varrho = r/R$,
$F' = \dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,\varphi}$ (Bezeichnung für eine beliebige Funktion F),
M = Lastmoment,
$\mathfrak{M}$ = Querbiegemoment in der Rohrwand für das Ringelement $\mathrm{d}\,\alpha$,
A = Formänderungsenergie,
$\bar{A}$ = Formänderungsenergie je Raumeinheit.

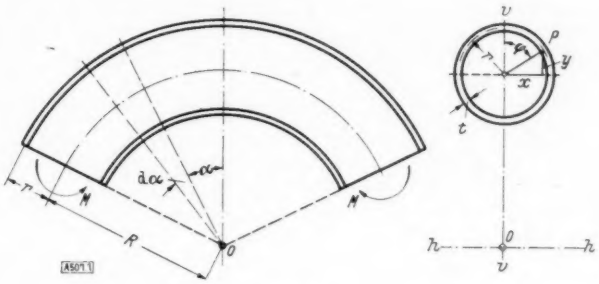


Bild 1.

B. Biegung in der Krümmerebene.

I. Eingrenzung der Verbiegung bei sehr großem Krümmungshalbmesser R.

Die Wand des gekrümmten Rohres erhält aus den Biegespannungen Ablenkungskräfte, die eine Verformung des Kreisringquerschnitts bewirken. Hierdurch wird seine Nachgiebigkeit vergrößert. Die nach der Biegetheorie des geraden Rohres berechnete Verbiegung ist daher noch mit einem Faktor $\varkappa$ zu multiplizieren, der eine Funktion des charakteristischen Wertes λ ist, die wir durch Eingrenzung bestimmen wollen.

Nach C. Weber[1]) lassen sich die Verschiebungen von Punkten elastischer Körper, für die das Hookesche Gesetz gilt, durch die Anwendung der beiden Minimalsätze eingrenzen. Es wird dabei einmal ein Verformungszustand angenommen und die gesuchte Verschiebung aus dem Minimum der Formänderungsenergie berechnet (Prinzip der potentiellen Energie). Das andere Mal wird die Verschiebung aus einem angenommenen Spannungszustand nach dem Satze von Castigliano bestimmt (Prinzip von Castigliano). Ist u_w die wirkliche Lageänderung des betrachteten Punktes und bezeichnen u_p und u_c die näherungsweise berechneten Verschiebungen nach dem Prinzip der potentiellen Energie und nach dem Prinzip von Castigliano, so gilt

$$u_p \leqq u_w \leqq u_c\,.$$

*) Auszug aus einer Dissertation an der Technischen Hochschule Dresden. Referent: Prof. Dr.-Ing. C. Weber, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. K. Beyer.

[1]) C. Weber: Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931), S. 244–45.

Der wirkliche Wert u_w ist also durch u_p von unten, durch u_c von oben eingegrenzt. Durch Verfeinerung der Ansätze verringert sich der Unterschied der beiden Näherungswerte u_p und u_c immer mehr, bis sie schließlich ineinander übergehen.

Entsprechend den beiden Minimalprinzipien sind zwei Rechnungsgänge notwendig, um die Verhältniszahl $\varkappa$ zu berechnen. Th. v. Karman[2]) behandelt bereits dieses Problem nach dem Prinzip der potentiellen Energie. Um aber die beiden verschiedenen Verfahren besser miteinander vergleichen zu können, wird hier die Karmansche Untersuchung mit einem allgemeinen Reihenansatz für die Querverformung gebracht.

Das Prinzip von Castigliano liefert eine obere Schranke. Wir nehmen am Rohrquerschnitt Längsspannungen an, die mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen. Hierbei tritt in der Rohrwandung eine Querbiegung ein. Der Faktor $\varkappa$, der hier aus der Spannungsenergie bestimmt wird, ist die obere Eingrenzung der wirklichen $\varkappa$-Funktion[3]).

Wir beschränken uns zunächst auf schwach gekrümmte Rohre und wenden das Ritzsche Näherungsverfahren an. Bei der Eingrenzung mit Hilfe der beiden Minimalsätze wird der Halbmesser r wie auch die Ordinate y gegen R als klein vernachlässigt. Das Krümmungsverhältnis ϱ wird mit genügender Genauigkeit gleich Null gesetzt. Die Querdehnung bleibt zunächst unberücksichtigt, die Zahl ν wird gleich Null angenommen. Der Einfluß von ν und ϱ auf die $\varkappa$-Funktion wird erst später untersucht.

a) Prinzip der potentiellen Energie.

Formänderungsansätze, Formänderungsenergie. Wir betrachten ein Rohrteilchen von differentialer Länge, das durch zwei Schnittebenen abgegrenzt wird, welche durch die Krümmungsachse $h-h$ gehen und unter dem Winkel $\mathrm{d}\alpha$ gegeneinander geneigt sind. Wir erhalten ein Ringelement. An diesem werden nach Bild 2 folgende Formänderungen angenommen:

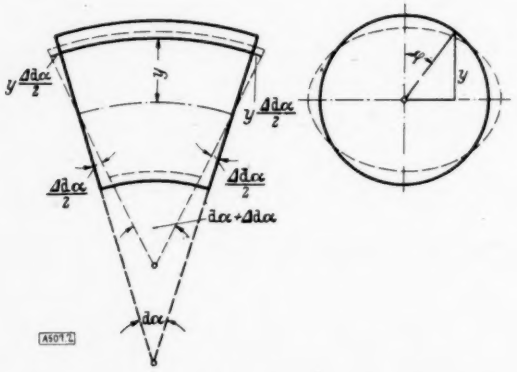


Bild 2 (links).

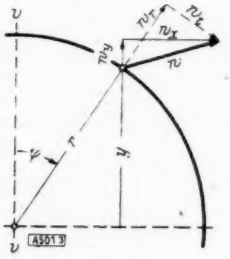


Bild 3.

1. Die Änderung $\Delta\,\mathrm{d}\alpha$ des Zentriwinkels $\mathrm{d}\alpha$ durch Verdrehung der Endquerschnitte.
2. Die Querverformung des Kreisringquerschnittes in ein Oval. Nach Bild 3 ergibt sich eine Verschiebung w, die in die Komponenten w_r und w_t zerlegt wird. (w_r werde nach außen, w_t in Richtung wachsendes φ positiv gerechnet.) Die Vertikalkomponente von w ist w_y.

Die Längsdehnung ε_1 besteht aus zwei Anteilen, die von der Änderung des Zentriwinkels und der Querverformung herrühren.

$$\varepsilon_1' = \frac{y}{y+R}\,\frac{\Delta\,\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{r}{R}\,\frac{\Delta\,\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\cos\varphi, \qquad \varepsilon_1'' = \frac{w_y}{y+R} = \frac{w_y}{R},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1''.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Rohrquerschnitte eben bleiben. Im Nenner wird y gegen R als klein vernachlässigt.

Für die Querbiegung infolge der Querverformung ergibt sich aus den Verschiebungskomponenten w_r, w_t die senkrechte Durchbiegung

$$w_y = w_r\cos\varphi - w_t\cdot\sin\varphi.$$

---

[2]) Th. v. Karman: Z. VDI Bd. 55 (1911), S. 1889.

[3]) C. Weber hat sowohl für die Biegung in der Krümmerebene, als auch für die Biegung senkrecht hierzu, die später behandelt wird, die Grundlösung nach dem Prinzip von Castigliano als obere Grenze gefunden. Hierüber besteht jedoch keine Veröffentlichung.

Um eine Beziehung zwischen den beiden Funktionen w_r und w_t zu erhalten, wird die Längsdehnung ε_m im Ringelement gleich Null gesetzt.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{1}{r}(w_r + w_t') = 0\,, \\ w_r &= -\,w_t'\,, \\ w_y &= -\,(w_t \cdot \sin\varphi + w_t' \cdot \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \text{(Ableitungen nach } \varphi \text{ sind durch ' bezeichnet).}$$

Hiermit:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}\left[r \cdot \frac{\Delta\,\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,a}\cos\varphi - w_t \sin\varphi - w_t' \cos\varphi\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Für das Biegemoment $\mathfrak{M}$ im Querschnitt des Kreisringes gilt:

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}}{EJ} &= \frac{1}{r^2}(w_r + w_r'') \\ \frac{\mathfrak{M}}{EJ} &= \frac{1}{r^2}(w_t' + w_t''') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Unbekannt ist die Funktion w_t. Sie muß so bestimmt werden, daß die Formänderungsenergie zum Minimum wird. Die Formänderungsenergie wird hierbei durch ε_1 und $\mathfrak{M}$, also durch w_t ausgedrückt. An Stelle von w_t führen wir die Funktion

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathrm{d}\,a}{r \cdot \Delta\,\mathrm{d}\,a}(w_t \sin\varphi + w_t' \cos\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ein. In Gl. (1) und (2) eingesetzt erhalten wir

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{R}\frac{\Delta\,\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,a}[\cos\varphi - \mathfrak{W}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{EJ} = \frac{\Delta\,\mathrm{d}\,a}{r\,\mathrm{d}\,a} \cdot \left(\frac{\mathfrak{W}'}{\cos\varphi}\right)' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Nun verwenden wir für w_t den allgemeinen sin-Ansatz

$$w_t = 2 \cdot \frac{r \cdot \Delta\,\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,a} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \sin 2n\varphi\,.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{W} = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \cdot [(2n+1)\cos(2n-1)\varphi + (2n-1)\cos(2n+1)\varphi]\,,$$

$$\left(\frac{\mathfrak{W}'}{\cos\varphi}\right)' = -\sum_{n=1}^{n=\infty} 4n(4n^2-1) \cdot c_n \cdot \cos 2n\varphi\,.$$

Die zunächst unbekannten Faktoren c_n ergeben sich aus der Bedingung, daß die Formänderungsenergie zum Minimum werden muß. Die Formänderungsenergie wird:

$$A = \frac{E}{2}\int\int\int \varepsilon_1^2 \cdot \mathrm{d}\,V + \frac{1}{2}\int \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} \cdot \mathrm{d}\,s$$

$$= \frac{E r^3 t}{2R} \cdot \frac{(\Delta\,\mathrm{d}\,a)^2}{\mathrm{d}\,a}\left\{2\int_0^\pi [\cos\varphi - \mathfrak{W}]^2\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{\lambda^2}{6}\int_0^\pi \left[\left(\frac{\mathfrak{W}'}{\cos\varphi}\right)'\right]^2 \mathrm{d}\,\varphi\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} A = \frac{E r^3 t}{2R} \cdot \frac{(\Delta\,\mathrm{d}\,a)^2}{\mathrm{d}\,a}\Bigg\{2\int_0^\pi \Bigg\{\cos\varphi - \sum_1^\infty c_n[(2n+1)\cos(2n-1)\varphi + (2n-1)\cos(2n+1)\varphi]\Bigg\}^2 \mathrm{d}\,\varphi \\ + \frac{8\lambda^2}{3}\int_0^\pi \left\{\sum_1^\infty c_n \cdot n(4n^2-1)\cos 2n\varphi\right\}^2 \mathrm{d}\,\varphi\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Bedingungsgleichungen. Aus dem Satze vom Minimum der Formänderungsenergie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}c_\mu} = -2\int_0^\pi \Big\{\cos\varphi - \sum_1^\infty c_n\,[(2n+1)\cos(2n-1)\varphi + (2n-1)\cos(2n+1)\varphi]\Big\}$$
$$[(2\mu+1)\cos(2\mu-1)\varphi + (2\mu-1)\cos(2\mu+1)\varphi]\,\mathrm{d}\varphi$$
$$+\frac{8\lambda^2}{3}\int_0^\pi \sum_1^\infty c_n \cdot n\,(4n^2-1)\cos 2n\varphi \cdot \mu\cdot(4\mu^2-1)\cos 2\mu\varphi\cdot\mathrm{d}\varphi\,.$$

Rechnen wir diesen Ausdruck aus, so erhalten wir Gleichungen folgender Art:

$$a_{\mu 1}\cdot c_1 + a_{\mu 2}\cdot c_2 + \cdots + a_{\mu k}\cdot c_k = b_\mu\,.$$

Für den vollständigen Reihenansatz ist $k=\infty$ zu nehmen. Durch Abbrechen nach dem ersten oder einem folgenden Gliede ($k=1$, $k=2$ usw.) ergeben sich Näherungslösungen, deren Genauigkeit mit der Zahl der Unbekannten wächst. Für die Vorzahlen $a_{\mu n}$ und die unabhängigen Glieder b_μ gilt:

$$\pi\cdot a_{\mu n} = 2\int_0^\pi [(2n+1)\cos(2n-1)\varphi + (2n-1)\cos(2n+1)\varphi]$$
$$[(2\mu+1)\cos(2\mu-1)\varphi + (2\mu-1)\cos(2\mu+1)\varphi]\,\mathrm{d}\varphi$$
$$+\frac{8\lambda^2}{3}n\cdot\mu\cdot(4n^2-1)(4\mu^2-1)\int_0^\pi \cos 2n\varphi\cdot\cos 2\mu\varphi\cdot\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\pi\cdot b_\mu = 2\int_0^\pi \cos\varphi\,[(2\mu+1)\cos(2\mu-1)\varphi + (2\mu-1)\cos(2\mu+1)\varphi]\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Hierin sind μ und n ganze Zahlen. Durch Ausintegrieren erhält man

$$a_{nn} = 2(4n^2+1) + \frac{4n^2}{3}(4n^2-1)^2\cdot\lambda^2$$

$a_{(n-1)n} = (2n-3)(2n+1)$ $\qquad$ $a_{n(n+1)} = (2n-1)(2n+3)$

Alle übrigen $a_{\mu n} = 0$

$$b_1 = 3\,.$$

Alle übrigen $b=0$.

Für die unabhängigen Werte und Vorzahlen erhalten wir nachstehende Matrix:

	1	2	3	4	b
1	$2(5+6\lambda^2)$	5			3
2	5	$2(17+600\lambda^2)$	21		
3		21	$2(37+7350\lambda^2)$	45	
4			45	$2(65+42336\lambda^2)$	

Berechnung der Faktoren $\varkappa$. Der unter (6) angegebene Ausdruck für die Formänderungsenergie kann für die Bestimmung der $\varkappa$-Funktion durch die Bedingungsgleichungen vereinfacht werden. Zunächst wählen wir eine vereinfachte Schreibweise für Gl. (6)

$$A = \frac{E r^3 t}{2R}\cdot\frac{(\Delta\,\mathrm{d}\alpha)^2}{\mathrm{d}\alpha}\Big\{2\int_0^\pi (G - \Sigma c_n\cdot H_n)^2\,\mathrm{d}\varphi + \frac{2\lambda^2}{3}\int_0^\pi (c_n\cdot J_n)^2\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

G, H_n, J_n sind Funktionen von φ.

Die Minimalbedingung lautet allgemein:

$$\frac{\partial A}{\partial c_k} = 0 = -2\int_0^\pi (G - \Sigma c_n \cdot H_n) H_k \cdot \mathrm{d}\varphi + \frac{2\lambda^2}{3}\int_0^\pi J_k \cdot \Sigma c_n \cdot J_n \cdot \mathrm{d}\varphi .$$

Mit $c_k \neq 0$ kann sie auch geschrieben werden:

$$0 = -2c_k\int_0^\pi (G - \Sigma c_n \cdot H_n) H_k \cdot \mathrm{d}\varphi + \frac{2\lambda^2}{3} c_k \int_0^\pi J_k \cdot \Sigma c_n \cdot J_n \cdot \mathrm{d}\varphi .$$

Die Summe aller dieser Ausdrücke ist

$$0 = -2\int_0^\pi \Sigma c_n \cdot H_n (G - \Sigma c_n H_n)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{2\lambda^2}{3}\int_0^\pi (\Sigma c_n \cdot J_n)^2\,\mathrm{d}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Nach Subtraktion der Gl. (8) von (7) erhalten wir

$$A = \frac{E r^3 t}{2R} \cdot \frac{(\Delta\,\mathrm{d}\alpha)^2}{\mathrm{d}\alpha} \int_0^\pi 2G (G - \Sigma c_n \cdot H_n)\,\mathrm{d}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Daraus folgt mit

$$G = \cos\varphi, \qquad H_n = (2n+1)\cos(2n-1)\varphi + (2n-1)\cos(2n+1)\varphi,$$

$$A = \frac{E r^3 t \pi}{2R\,\mathrm{d}\alpha} \cdot (\Delta\,\mathrm{d}\alpha^2) \cdot [1 - 3c_1] \leqq \frac{M}{2} \cdot 1\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$\Delta\,\mathrm{d}\alpha \leqq \frac{MR\,\mathrm{d}\alpha}{E r^3 t \pi} \cdot \frac{1}{1-3c_1},$$

$$\underline{\underline{\varkappa \leqq \frac{1}{1-3c_1}}} \quad . \quad (10).$$

Wir berechnen nun die $\varkappa$-Werte, indem wir den Reihenfaktor c_1 bestimmen und in (10) einsetzen. Für c_1 bestehen verschiedene Näherungen, je nach der Zahl der Gleichungen und der Unbekannten, die zur Bestimmung verwendet werden. Obenstehende Matrix zeigt, daß die Gleichungen aus dreigliedrigen Ausdrücken mit Symmetrie zur Hauptdiagonale bestehen. Bei Entwicklung von $\varkappa$ in einen Kettenbruch[4]) wird

$$\varkappa = \cfrac{1}{1 - \cfrac{3b_1}{a_{11} - \cfrac{a_{12}^2}{a_{22} - \cfrac{a_{23}^2}{a_{33} - \cdots}}}}$$

1. Näherung

2. Näherung

3. Näherung

Hieraus:

1. Näherung: $\varkappa_1 = \dfrac{10 + 12\lambda^2}{1 + 12\lambda^2}$,

2. Näherung: $\varkappa_2 = \dfrac{105 + 4136\lambda^2 + 4800\lambda^4}{3 + 536\lambda^2 + 4800\lambda^4}$,

3. Näherung: $\varkappa_3 = \dfrac{252 + 73912\lambda^2 + 2446176\lambda^4 + 2822400\lambda^6}{3 + 3280\lambda^2 + 329376\lambda^4 + 2822400\lambda^6}$.

[4]) K. Beyer: Statik im Eisenbetonbau, 2. Aufl., Bd. I, Berlin 1933, S. 230.

XUM

b) Prinzip von Castigliano.

Spannungsansatz und Querbiegung. Für die Längsspannungen wählen wir den Ansatz:

$$\sigma = \frac{M}{r^2\, t\, \pi}\left[\cos\varphi + \sum_1^\infty c_n \cdot \cos(2n+1)\varphi\right]. \qquad (11).$$

Sie erzeugen in den Längsfasern des Ringelements mit dem Zentriwinkel $\mathrm{d}\alpha$ Ablenkungskräfte $\sigma \cdot \mathrm{d}F \cdot \mathrm{d}\alpha$ (Bild 4), die sich über den Umfang des Ringelements als Streckenlast verteilen. Diese ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$a = \sigma \cdot t \cdot \mathrm{d}\alpha.$$

Die Ablenkungsbelastung ruft im dreifach statisch unbestimmten Ringelement ein Biegemoment hervor. Für dieses erhalten wir

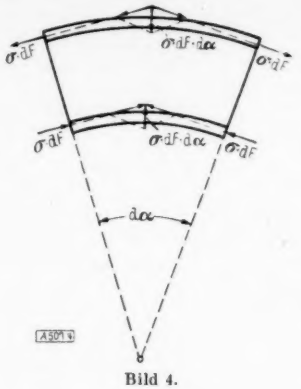


Bild 4.

$$\mathfrak{M} = -\frac{M\,\mathrm{d}\alpha}{4\pi}\left\{\cos 2\varphi + \sum_1^\infty \frac{c_n}{n(n+1)(2n+1)}\left[(n+1)\cos 2n\varphi + n\cdot\cos 2(n+1)\varphi\right]\right\}. \quad . \quad (12).$$

Spannungsenergie unter Berücksichtigung der Minimalbedingung. Die Spannungsenergie wird:

$$A = \frac{1}{2E}\int\int\int \sigma^2\,\mathrm{d}\,V + \int \frac{\mathfrak{M}^2}{2EJ}\cdot\mathrm{d}\,s.$$

Setzen wir für σ und $\mathfrak{M}$ Gl. (11) und (12) ein, erhalten wir in vereinfachter Schreibweise

$$A = \frac{M^2 R\,\mathrm{d}\alpha}{E r^3 t \pi^2}\left\{\int_0^\pi \left[G + \sum_1^\infty c_n \cdot H_n\right]^2 \cdot \mathrm{d}\varphi + \frac{3}{4\lambda^2}\int_0^\pi \left[J + \sum_1^\infty c_n \cdot K_n\right]^2 \cdot \mathrm{d}\varphi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Hierin sind G, H_n, J, K_n Funktionen von φ.

Die Minimalbedingung ergibt:

$$\frac{\partial A}{\partial c_k} = 0 = \int_0^\pi \left[G + \sum_1^\infty c_n \cdot H_n\right]\cdot H_k \cdot \mathrm{d}\varphi + \frac{3}{4\lambda^2}\int_0^\pi \left[J + \sum_1^\infty c_n \cdot K_n\right] K_k \cdot \mathrm{d}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Setzen wir die Summe aller Bedingungsgleichungen in den Ausdruck (13) ein, so erhalten wir ähnlich wie beim Minimalansatz der potentiellen Energie

$$A = \frac{M^2 R\,\mathrm{d}\alpha}{E r^3 t \pi^2}\left\{\int_0^\pi G\left[G + \sum_1^\infty c_n \cdot H_n\right]\mathrm{d}\varphi + \frac{3}{4\lambda^2}\int_0^\pi J\cdot\left[J + \sum_1^\infty c_n \cdot K_n\right]\mathrm{d}\varphi\right.$$

und nach Integration:

$$A = \frac{M R\,\mathrm{d}\alpha}{2 E r^3 t \pi}\left\{1 + \frac{3}{4\lambda^2} + \frac{c_1}{4\lambda^2}\right\} \leqq \frac{M}{2}\cdot \Delta\,\mathrm{d}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Hieraus finden wir

$$\Delta\,\mathrm{d}\alpha \leqq \frac{M R\,\mathrm{d}\alpha}{E r^3 t \pi}\left\{1 + \frac{3}{4\lambda^2} + \frac{c_1}{4\lambda^2}\right\},$$

$$\underline{\underline{\varkappa \leqq 1 + \frac{3}{4\lambda^2} + \frac{c_1}{4\lambda^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die $\varkappa$-Funktion enthält den Teil $1 + 3/4\cdot\lambda^2$, den wir als Grundlösung bezeichnen, und den vom Näherungsansatz abhängigen Teil $c_1/4\lambda^2$.

Berechnung der Faktoren $\varkappa$. Aus den Bedingungsgleichungen (14) erhalten wir ein Gleichungssystem von der Form

$$a_{\mu 1}\cdot c_1 + a_{\mu 2}\, c_2 + \cdots\cdots + a_{\mu k}\cdot c_k = b_\mu.$$

Durch Integration finden wir:

$$a_{n\,n} = 2\lambda^2 + \frac{3\left[n^2 + (n+1)^2\right]}{2\left[n(n+1)(2n+1)\right]^2},$$

$$a_{(n-1)\,n} = \frac{3}{2n^2(4n^2-1)}, \qquad a_{n(n+1)} = \frac{3}{2(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}.$$

Alle übrigen $a_{\mu n} = 0$.

$$b_1 = -\frac{1}{2}.$$

Alle übrigen $b_\mu = 0$.

Diese Werte sind, multipliziert mit 600, für $n = 1$ bis $n = 4$ in der nachstehenden Matrix zusammengefaßt.

	1	2	3	4	b
1	$25(48\lambda^2+5)$	15			-300
2	15	$1200\lambda^2+13$	$\frac{20}{7}$		
3		$\frac{20}{7}$	$\frac{25}{196}(9408\lambda^2+25)$	$\frac{25}{28}$	
4			$\frac{25}{28}$	$\frac{1}{36}(43200\lambda^2+41)$	

Nach den früheren Ausführungen läßt sich c_1 als Kettenbruch darstellen. Setzt man c_1 in (16) ein, so erhält man:

Grundlösung: $\varkappa_0 = 1 + \dfrac{3}{4\lambda^2}$,

1. Näherung: $\varkappa_1 = 1 + \dfrac{3}{4\lambda^2 - \dfrac{3}{\lambda^2(48\lambda^2+5)}}$,

2. Näherung: $\varkappa_2 = 1 + \dfrac{3}{4\lambda^2 - \dfrac{3600\lambda^2+39}{57600\lambda^6+6624\lambda^4+56\lambda^2}}$,

3. Näherung: $\varkappa_3 = 1 + \dfrac{3}{4\lambda^2 - \dfrac{11289600\lambda^4+152304\lambda^2+261}{180633600\lambda^8+21252864\lambda^6+229792\lambda^4+360\lambda^2}}$.

II. Berücksichtigung der Querdehnung.

Die Ableitung der Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte wurde durch die Annahme vereinfacht, daß die Querzahl $\nu = 0$ ist. Ergänzend wollen wir nun den Einfluß der Querdehnung auf die $\varkappa$-Funktion feststellen. Hierbei benutzen wir das Prinzip von Castigliano.

Für unsere Untersuchungen können wir wie früher annehmen, daß die Spannungen senkrecht zur Rohrwandung σ_z (Bild 5) keine Bedeutung besitzen und setzen sie deshalb gleich Null. Es ist dann ein zweiachsiger Spannungszustand vorhanden.

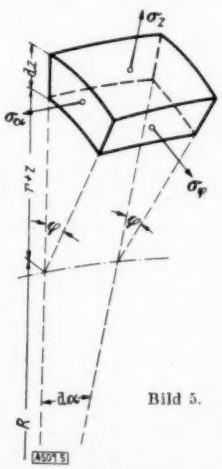


Bild 5.

Die Längsspannungen des Rohrkrümmers nennen wir jetzt σ_α, während wir die Spannungen aus dem Querbiegemoment $\mathfrak{M}$ mit σ_φ bezeichnen. Letztere haben infolge der Querdehnung das Bestreben, den Kreisringquerschnitt zu verwölben. Da dieser aber eben bleiben muß, müssen in Längsrichtung neben den früheren Biegespannungen σ noch Spannungen wirken, welche die Verzerrung aufheben. Wir setzen also:

$$\sigma_\alpha = \sigma + \nu \cdot \sigma_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

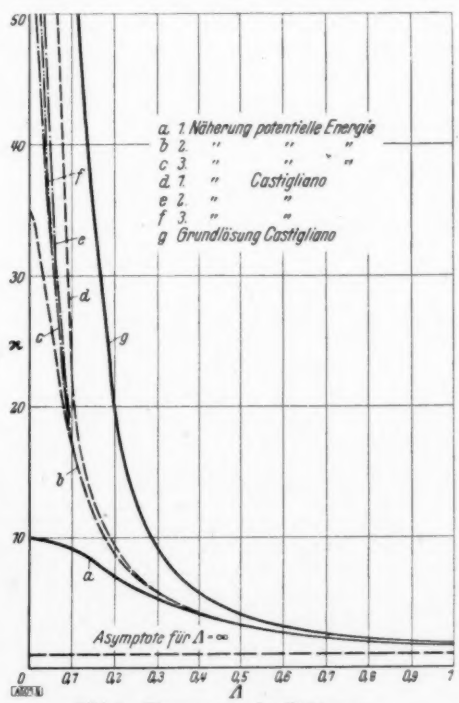


Bild 6. Eingrenzung des Faktors $\varkappa$.

Wir verwenden für σ den früheren Ansatz (11). Die zusätzlichen Spannungen $\nu \cdot \sigma_\varphi$ rufen Ablenkungskräfte hervor, die sich jedoch in jedem Querschnitt $t\,r\,\mathrm{d}\,\varphi$ des Ringelements selbst ausgleichen, so daß die Ablenkungsbelastung gegenüber dem früheren Ergebnis keine Änderung erfährt. Da die Spannung $\nu \cdot \sigma_\varphi$ keinen Einfluß auf die Querbiegespannungen ausübt, erhalten wir für das Querbiegemoment $\mathfrak{M}$ den früheren Ausdruck (12) und hieraus σ_φ.

Die spezifische Spannungsenergie für den zweiachsigen Spannungszustand wird

$$\bar{A} = \frac{1}{2E}[\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varphi^2 - 2\nu\,\sigma_\alpha\,\sigma_\varphi] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Setzen wir $\sigma_\alpha = \sigma + \nu \cdot \sigma_\varphi$ ein, so erhalten wir:

$$\bar{A} = \frac{1}{2E}[\sigma^2 + (1-\nu^2)\,\sigma_\varphi^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Bei Integration von $\bar{A}$ wird:

$$A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{\sigma^2}{2E} \cdot \mathrm{d}\,V + (1-\nu^2) \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{\mathfrak{M}^2}{2EJ}\,\mathrm{d}\,s\,.$$

Für σ und $\mathfrak{M}$ sind die früheren Ansätze (11) und (12) einzusetzen. Hieraus folgt, daß bei Berücksichtigung der Querdehnung nur der charakteristische Wert λ in den $\varkappa$-Funktionen nach dem Prinzip von Castigliano in $\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\nu^2}}$ übergeht, während die funktionalen Beziehungen ungeändert bleiben. Durch fortgesetzte Steigerung der Genauigkeit der Näherungsansätze erzielen wir auch hier Ergebnisse, die in den wirklichen Wert von $\varkappa$ übergehen. Eine Untersuchung nach dem Prinzip der potentiellen Energie erübrigt sich daher.

Setzt man sowohl in den drei Näherungen nach dem Satze der potentiellen Energie als auch in der Grundlösung und den drei Näherungen nach dem Satze von Castigliano Λ an Stelle von λ, berechnet dann für verschiedene Λ-Werte den Faktor $\varkappa$ und trägt ihn über Λ auf, so erhält man Bild 6.

In dieser Darstellung läßt sich die schrittweise Steigerung der Genauigkeit der Eingrenzung gut verfolgen. Für größere Λ-Werte ist die Grundlösung des Prinzips von Castigliano eine genügend genaue Näherung. Legt man die für technische Berechnungen meist ausreichende Rechenschiebergenauigkeit zugrunde, gilt folgendes: Nach dem Satze der potentiellen Energie stimmt die erste Näherung bis $\Lambda = 0{,}6$, die zweite bis $\Lambda = 0{,}2$ und die dritte bis $0{,}1 > \Lambda > 0{,}05$ mit den höheren Näherungen überein. Beim Prinzip von Castigliano ist dies für die erste Näherung bis $\Lambda = 0{,}35$, für die zweite bis $\Lambda = 0{,}10$ der Fall. Der Genauigkeitsbereich der dritten Näherung läßt sich nicht festlegen, da die Vergleichsmöglichkeiten fehlen. Aus der nachstehenden Zusammenstellung geht jedoch hervor, daß für $\Lambda = 0{,}05$ der Fehler bei Verwendung der dritten Näherungen beider Minimalansätze kleiner als 2,2 % sein muß. Also sind hierfür beide noch brauchbar. Kleinere Λ-Werte als 0,05 werden praktisch kaum vorkommen. Für die dritten Näherungen erhält man:

$\Lambda = 0{,}05$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
Pot. E.: 33,991	17,307	11,555	8,6751	6,9223	5,7280	4,8598	4,2036,
Cast.: 34,752	17,316	11,555	8,6751	6,9223	5,7280	4,8598	4,2037.
$\Lambda = 0{,}45$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
Pot. E.: 3,6948	3,2929	2,7090	2,3158	2,0406	1,8415	1,6934,	
Cast.: 3,6949	3,2929	2,7090	2,3159	2,0406	1,8415	1,6934.	

III. Berücksichtigung der Krümmung der Rohrmittellinie.

In den bisherigen Untersuchungen wurde angenommen, daß der Krümmungshalbmesser R gegenüber dem Halbmesser r des Rohrquerschnitts sehr groß ist. Es soll nun festgestellt werden, welchen Einfluß die Krümmung des Rohres auf die vorher behandelte Formänderung hat. Zu dem bisherigen $\varkappa$-Wert tritt noch eine Funktion von ϱ und λ. Diese gibt den Anteil der Krümmung an dem Faktor $\varkappa$ an, der das Verhältnis der Verbiegung des gekrümmten Rohres zum geraden Rohre darstellt. Sie wird nur nach dem Satze von Castigliano bestimmt, da eine genauere Annahme über den Verformungszustand zu kompliziert wird. In den folgenden Untersuchungen werden nur die Glieder mit ϱ und ϱ^2 berücksichtigt.

Der Gang der Berechnung ist der gleiche wie früher, nur muß jetzt der Spannungsansatz geändert werden. Wir bilden ihn aus dem bekannten Ausdruck für den Spannungszustand des gekrümmten Trägers, den wir durch eine cos-Reihe mit zunächst noch unbekannten Faktoren verbessern. Die Freiwerte erhalten wir aus dem Minimum der Spannungsenergie.

Spannungsansatz, Querbiegung. Längsspannung:

$$\sigma = \frac{M}{r^2 t \pi}\left[\frac{\varrho}{2} + \frac{4-3\varrho^2}{4}\cdot\frac{\cos\varphi}{1+\varrho\cos\varphi} + \sum_1^\infty c_n \cdot \cos(n+1)\varphi\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

oder nach Entwickeln von $\frac{1}{1+\varrho\cos\varphi}$ in eine Reihe unter Vernachlässigung aller höheren Potenzen als ϱ^2:

$$\sigma = \frac{M}{r^2 t \pi}\left[\cos\varphi - \frac{\varrho}{2}\cos 2\varphi + \frac{\varrho^2}{4}\cos 3\varphi + \sum_1^\infty c_n \cos(n+1)\varphi\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Der schwach trapezförmige Querschnitt der Wandung des Ringelements wird mit genügender Genauigkeit als Rechteck angenommen. Dann ist für parabelförmige Verteilung der Schubspannung die Schubverteilungszahl 1,2 zu nehmen. Die Querzahl wird wieder zur Vereinfachung der Berechnung gleich Null gesetzt. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir für die Schnittkräfte aus den Ablenkungskräften im statisch unbestimmten Ring folgende Ausdrücke:

Biegemoment:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M} = \frac{M\,d\alpha}{4\pi}\Big\{&\frac{\varrho}{2}\cos\varphi + \frac{12+\varrho^2}{12}\cos 2\varphi - \frac{\varrho}{6}\cos 3\varphi + \frac{\varrho^2}{24}\cos 4\varphi \\ &+ \frac{c_1}{3}\left(\varrho^2\cdot\frac{\lambda^2+1}{2}\cos\varphi + \cos 3\varphi\right) + \frac{c_2}{6}(\varrho\cos\varphi + 2\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) \\ &+ \frac{c_3}{30}\left(-\frac{5}{4}\varrho^2\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + 3\cos 5\varphi\right) \ldots\ldots\Big\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Längskraft:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N} = \frac{M\,d\alpha}{2r\pi}\Big\{&1 - \cos 2\varphi + \frac{c_1}{2}(2\cos\varphi - \cos 3\varphi) \\ &+ \frac{c_2}{3}(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi) + \frac{c_3}{4}(\cos 3\varphi - \cos 5\varphi) \ldots\ldots\Big\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Querkraft:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Q} = \frac{M\,d\alpha}{2r\pi}\Big\{&\sin 2\varphi + \frac{c_1}{2}\sin 3\varphi + \frac{c_2}{3}(\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) \\ &+ \frac{c_3}{4}(\sin 3\varphi - \sin 5\varphi) \ldots\ldots\Big\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Spannungsenergie unter Berücksichtigung der Minimalbedingungen. Die unbekannten Faktoren c_n des Spannungsansatzes werden nach dem Satze von Castigliano ermittelt.

$$A = \frac{1}{2E}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\sigma^2\,dV + \frac{1}{2E}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{\mathfrak{M}^2}{J}\cdot ds + \frac{1}{2E}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{\mathfrak{N}^2}{F}\,ds + \frac{1{,}2}{2G}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{\mathfrak{Q}^2}{F}\cdot ds.$$

$\{\}_{\mathfrak{M}}$, $\{\}_{\mathfrak{N}}$, $\{\}_{\mathfrak{Q}}$ bedeutet die innerhalb dieser Klammern stehenden Ausdrücke von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$.

$$A = \frac{M^2 R\,d\alpha}{Er^3 t\pi^2}\left\{\int_0^\pi\left[\cos\varphi + \sum_1^\infty c_n\cdot\cos(n+1)\varphi\right]^2(1+\varrho\cos\varphi)\,d\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{3}{4\lambda^2}\int_0^\pi\{\}_{\mathfrak{M}}^2\frac{d\varphi}{1+\varrho\cos\varphi} + \frac{\varrho^2}{4}\int_0^\pi\{\}_{\mathfrak{N}}^2\cdot\frac{d\varphi}{1+\varrho\cos\varphi} + \frac{3\varrho^2}{5}\int_0^\pi\{\}_{\mathfrak{Q}}^2\cdot\frac{d\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right\}.$$

Wir wählen wie früher die vereinfachte Schreibweise mit G, H_n, J, K_n, L, O_n, P, Q_n als Funktionen von φ.

$$A = \frac{M^2 R\,\mathrm{d}\,\alpha}{E r^3 t \pi^2} \cdot \frac{1}{4\lambda^2} \Big\{ 4\lambda^2 \int_0^\pi [G + \Sigma c_n \cdot H_n]^2 \cdot (1 + \varrho \cos\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi + 3 \int_0^\pi [J + \Sigma c_n K_n]^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi}$$

$$+ \varrho^2 \lambda^2 \int_0^\pi [L + \Sigma c_n \cdot O_n]^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} + \varrho^2 \cdot \frac{12\lambda^2}{5} \int_0^\pi [P + \Sigma c_n \cdot Q_n]^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} \Big\}.$$

$$\frac{\partial A}{\partial c_k} = 0 = 4\lambda^2 \int_0^\pi H_k \cdot [G + \Sigma c_n H_n](1 + \varrho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi + 3 \int_0^\pi K_k [J + \Sigma c_n K_n] \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi}$$

$$+ \varrho^2 \lambda^2 \int_0^\pi O_k [L + \Sigma c_n O_n] \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} + \varrho^2 \cdot \frac{12\lambda^2}{5} \int_0^\pi Q_k [P + \Sigma c_n \cdot Q_n] \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi}.$$

Durch Ausrechnen erhalten wir eine lineare Gleichung folgender Form:

$$b_\mu = a_{\mu 1} \cdot c_1 + u_{\mu 2} \cdot c_2 + \cdots \cdot a_{\mu k} \cdot c_k.$$

Hierin ist nach Division von $\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,c_\mu}$ durch π:

$$a_{\mu n} = \frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^\pi H_n H_\mu (1 + \varrho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{3}{\pi} \int_0^\pi K_n K_\mu \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi}$$

$$+ \frac{\varrho^2\lambda^2}{\pi} \int_0^\pi O_n O_\mu \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} + \varrho^2 \cdot \frac{12\lambda^2}{5\pi} \int_0^\pi Q_n Q_\mu \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi},$$

$$b_\mu = -\Big\{ \frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^\pi G H_\mu (1 + \varrho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{3}{\pi} \int_0^\pi J \cdot K_\mu \cdot \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi}$$

$$+ \frac{\varrho^2\lambda^2}{\pi} \int_0^\pi L \cdot O_\mu \cdot \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} + \varrho^2 \cdot \frac{12\lambda^2}{5\pi} \int_0^\pi P \cdot Q_\mu \cdot \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} \Big\}.$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß c_1 und c_3 die ungeradzahligen Potenzen ϱ, $\varrho^3 \ldots$ enthalten, ergibt sich für die Bedingungsgleichungen das Schema Seite 341.

Wird die Berechnung der Spannungsenergie wie früher mit Hilfe der Bedingungsgleichungen vereinfacht, ergibt sich:

$$A = \frac{M^2 R\,\mathrm{d}\,\alpha}{E r^3 t \pi^2} \Big\{ \int_0^\pi G\,(G + \Sigma c_n \cdot H_n)(1 + \varrho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{3}{4\lambda^2} \int_0^\pi J \cdot (J + \Sigma c_n \cdot K_n) \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi}$$

$$+ \frac{\varrho^2}{4} \int_0^\pi L\,(L + \Sigma c_n \cdot O_n) \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} + \frac{3\varrho^2}{5} \int_0^\pi P (P + \Sigma c_n \cdot Q_n) \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{1 + \varrho\cos\varphi} \Big\}$$

oder ausführlich geschrieben

$$= \frac{M^2 R\,\mathrm{d}\,\alpha}{E r^3 t \pi^2} \Big\{ \int_0^\pi \Big[\cos\varphi - \frac{\varrho}{2}\cos 2\varphi + \frac{\varrho^2}{4}\cos 3\varphi \ldots \Big] \Big(\frac{\varrho}{2} + \frac{4 - \varrho^2}{4}\cos\varphi \Big)\,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$+ \frac{\varrho^2}{4} \int_0^\pi \Big\{ (1 - \cos 2\varphi) + \frac{c_1}{2}(2\cos\varphi - \cos 3\varphi) + \frac{c_2}{3}(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi) \ldots \Big\} (1 - \cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$+ \frac{3\varrho^2}{5} \int_0^\pi \Big\{ \sin 2\varphi + \frac{c_1}{2}\sin 3\varphi + \frac{c_2}{2}(\sin 2\varphi + \sin 3\varphi) \ldots \Big\} \sin 2\varphi \cdot \mathrm{d}\,\varphi$$

	b	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	$80\,\varrho$	$40\,(12\,\lambda^2+1)$	$30\,\varrho\,(8\,\lambda^2-1)$	20	$-6\,\varrho$	$2\,\varrho^2$
2	$-120+\frac{\varrho^2}{2}\,(113\,\lambda^2+145)$	$30\,\varrho\,(8\,\lambda^2-1)$	$10\,(48\,\lambda^2+5)+\frac{\varrho^2}{3}\,(272\,\lambda^2+75)$	$6\,\varrho\,(40\,\lambda^2-3)$	$6+\frac{7\,\varrho^2}{5}\,(8\,\lambda^2+5)$	$-2\,\varrho$
3	$40\,\varrho$	20	$6\,\varrho\,(40\,\lambda^2-3)$	$\frac{4}{3}\,(600\,\lambda^2+17)$	$6\,\varrho\,(40\,\lambda^2-1)$	$\frac{12}{5}$
4	$-\frac{27}{2}\,\varrho^2$	$-6\,\varrho$	$6+\frac{7\,\varrho^2}{5}\,(8\,\lambda^2+5)$	$6\,\varrho\,(40\,\lambda^2-1)$	$\frac{2}{5}\,(1200\,\lambda^2+13)+\frac{\varrho^2}{25}\,(816\,\lambda^2+95)$	$\frac{6}{7}\,\varrho\,(280\,\lambda^2-3)$
5		$2\,\varrho^2$	$-2\,\varrho$	$\frac{12}{5}$	$\frac{6}{7}\,\varrho\,(286\,\lambda^2-3)$	$\frac{16}{245}\,(7350\,\lambda^2+37)$

Grundlösung

1. Näherung

2. Näherung

$$+\frac{3}{4\lambda^2}\int_0^{\pi}\Big\{\frac{\varrho}{2}\cos\varphi+\frac{12+\varrho^2}{12}\cos 2\varphi-\frac{\varrho}{6}\cos 3\varphi+\frac{\varrho^2}{24}\cos 4\varphi+\frac{c_1}{3}\Big(\varrho^2\cdot\frac{\lambda^2+1}{2}\cos\varphi+\cos 3\varphi\Big)$$

$$+\frac{c_2}{6}(\varrho\cos\varphi+2\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)+\frac{c_3}{30}\Big(-\frac{3}{4}\varrho^2\cos\varphi+5\cos 3\varphi+3\cos 5\varphi\Big)$$

$$+\frac{c_4}{30}(3\cos 4\varphi+2\cos 6\varphi)\ldots\Big\}\Big(\frac{12+5\varrho^2}{12}\cos 2\varphi-\frac{2\varrho}{2}\cos 3\varphi+\frac{3\varrho^2}{8}\cos 4\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi\Big\}.$$

Durch Integration finden wir mit

$$c_1=\varrho\cdot k_1,\qquad c_2=k_2'+\varrho^2\cdot k_2'',$$
$$c_3=\varrho\,k_3,\qquad c_4=k_4'+\varrho^2\,k_4''.$$

$$A=\frac{M^2\,R\,\mathrm{d}\,\alpha}{2\,E\,r^3\,t\,\pi}\Big\{1+\frac{3}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}\cdot k_3'+\varrho^2\cdot\Big[\frac{132\lambda^2+55}{120\lambda^2}-\frac{1}{6\lambda^2}k_1+\frac{112\lambda^2+145}{960\lambda^2}k_2'+\frac{1}{4\lambda^2}\cdot k_2''-\frac{1}{12\lambda^2}k_3+\frac{9}{320\lambda^2}\cdot k_4'\Big]\Big\}\qquad(25).$$

Berechnung der Faktoren $\varkappa$. Durch Ausrechnen der Reihenfaktoren mit Hilfe der Matrix erhalten wir für das Prinzip von Castigliano je nach der Zahl der Unbekannten, die wir berücksichtigen, verschiedene Näherungen des Korrekturgliedes, die zu einem entsprechenden $\varkappa$-Wert für sehr großen Krümmungshalbmesser R hinzutreten.

Grundlösung:

$$\varkappa_{K0}=\varrho^2\cdot\Big(1{,}1+\frac{11}{24\lambda^2}-\frac{1}{36\lambda^4+3\lambda^2}\Big)\qquad(n=1),$$

1. Näherung:

$$\varkappa_{K1}=\varrho^2\Big(1{,}1+\frac{11}{24\lambda^2}-\frac{645120\lambda^8+2264678{,}4\lambda^6+80248\lambda^4+5433{,}4\lambda^2+31{,}75}{11059200\lambda^{10}+3538944\lambda^8+384192\lambda^6+14840\lambda^4+75\lambda^2}\Big)\qquad(n=3).$$

Die λ-Funktion des Korrekturgliedes der 2. Näherung ist bereits ein sehr umfangreicher Ausdruck. Daher wird die $\varkappa_{K_2}$-Funktion ($n=5$) punktweise für einzelne ausgezeichnete λ-Werte bestimmt.

Aus Bild 7 ist die Konvergenz der Näherungen des Korrekturgliedes zu erkennen. Bild 8 zeigt die Änderung der $\varkappa$-Funktion bei Berücksichtigung der Krümmung. Hier ergibt sich ein nur unbedeutender Fehler, wenn wir in der unter der Annahme $\nu=0$ berechneten Verbesserung an Stelle von λ die Größe $\Lambda=\lambda/\sqrt{1-\nu^2}$ setzen. Die $\varkappa$-Werte sind für $\varrho=0{,}00$, 0,25, 0,5 und 1,0 aufgetragen. Das Schaubild zeigt deutlich, daß die Korrekturen für $\varrho\leqq 1/3$, die wir mit dem verwendeten Berechnungsverfahren genau bestimmen können, das Ergebnis für $\varrho=0$ nur unwesentlich ändern. Die verbesserten $\varkappa$-Funktionen sind ebenfalls für $t/r=0{,}15$, 0,20, 0,25 und 0,30 in Bild 8 eingetragen, um den Einfluß der Wandstärke zu zeigen.

C. Biegung quer zur Krümmerebene.

In den vorhergehenden Abschnitten ist die Formänderung eines dünnwandigen, gekrümmten Rohres bei Biegung in der Krümmungsebene untersucht worden. Nun soll die Formänderung durch Momente ermittelt werden, die senkrecht zu dieser Ebene wirken. Um von deren Spannungs- und Formänderungszustand ein klares Bild zu bekommen, wird das Verhalten des Rohres durch ähnliche Methoden festgestellt, wie sie in den vorstehenden Abschnitten angewendet wurden. Hierbei wird das Verfahren von Castigliano benutzt, da es hier einfacher ist, den Beanspruchungs- und Formänderungszustand aus einem Spannungsansatz aufzubauen, als den Formänderungszustand auf dem Wege der Anschauung zu finden. Für die folgenden Untersuchungen wird der Belastungfall Bild 9 gewählt.

I. Kräfte am Ringelement.

Wie früher betrachten wir ein Rohrteilchen von differentialer Länge, das durch zwei Schnittebenen abgegrenzt wird, welche durch die Krümmungsachse $h-h$ gehen und unter dem Winkel $\mathrm{d}\,\alpha$ gegeneinander geneigt sind. Jeder Querschnitt wird auf Biegung und Torsion beansprucht. Es ergeben sich die Komponenten, die in Bild 11 aufgezeichnet sind. Dieser Belastungszustand läßt sich nach Bild 12 in zwei Gleichgewichtsgruppen I und II aufspalten, wenn man die mit $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ multiplizierten Teile trennt. In der Belastungsgruppe I tritt zu den Biegemomenten noch der differentiale Betrag aus der Änderung der Torsion, um das Gleichgewicht zu erhalten. Ebenso tritt in der Belastungsgruppe II zu dem Torsionsmoment der differentiale Betrag aus der Änderung des Biegemoments.

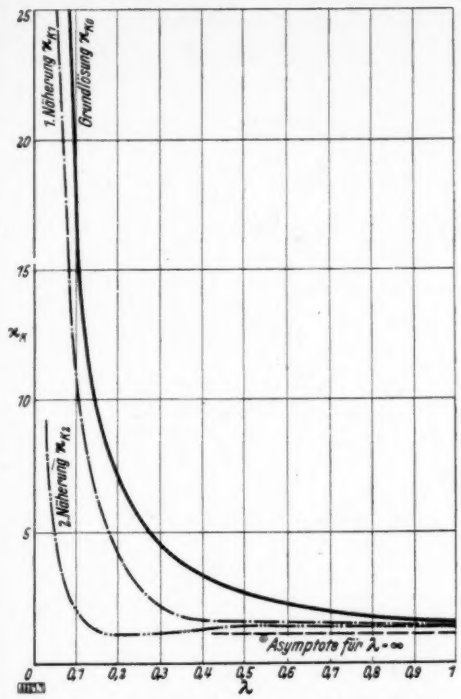


Bild 7. Korrekturfunktionen nach Castigliano.

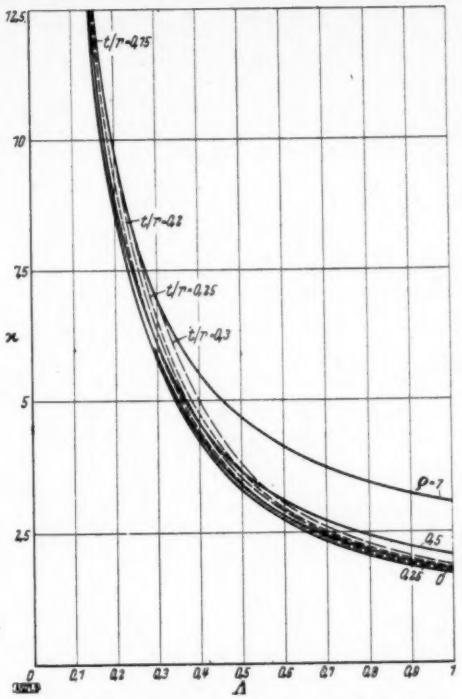


Bild 8. Krümmungskorrektur $\varkappa$ nach Castigliano.

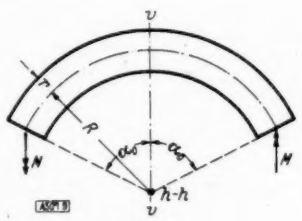


Bild 9.

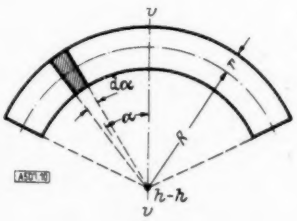


Bild 10.

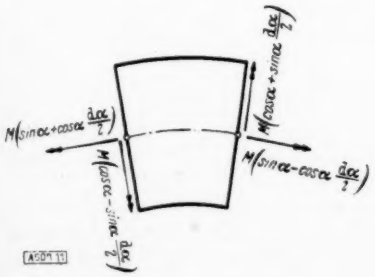


Bild 11 (links).

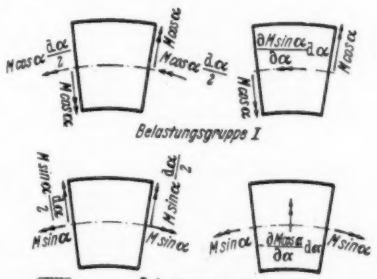


Bild 12 (rechts).

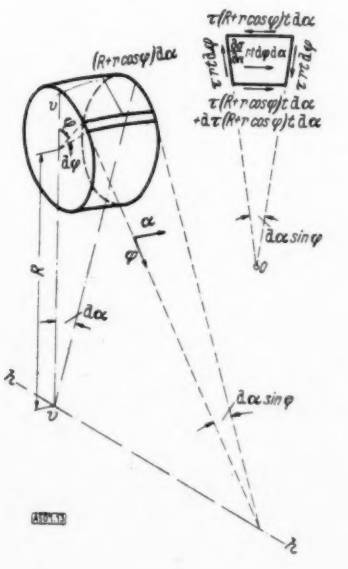


Bild 13 (rechts).

II. Beziehungen zwischen Torsions- und Biegespannungen.

Die Belastungsgruppe II ergibt neben den Torsionsspannungen eine Belastung des Ringelements in Richtung der Rohrwandung. Da die Querschnitte mit der Höhe $(R + r \cdot \cos\varphi)\,\mathrm{d}\,a$ keine Biegemomente aufnehmen können, erhalten wir eine Bedingung, aus der wir eine Beziehung zwischen Torsions- und Biegespannungen ableiten können. In Bild 13 sind die Kräfte angegeben, die am Volumenelement mit der Dicke t bei Belastung durch Gruppe II auftreten. Wir bestimmen zunächst die Resultierende in der a-Richtung, wobei wir $\mathrm{d}\,\tau = \tau' \cdot \mathrm{d}\,\varphi$ setzen.

$$P_a = -2\,\tau\,r\,t\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,a\sin\varphi + \tau'\,(R + r\cos\varphi)\,t\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,a - \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,a}\,r\,t\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,a\,.$$

Die Längsbelastung der Rohrwandung als Streckenlast erhalten wir durch Division von P_a mit $r \cdot \mathrm{d}\,\varphi$

$$\left.\begin{aligned} p_a &= \frac{R\,t\,\mathrm{d}\,a}{r} \\ &\left[\tau' + \varrho\left(\tau'\cos\varphi - 2\,\tau\sin\varphi - \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,a}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (26).$$

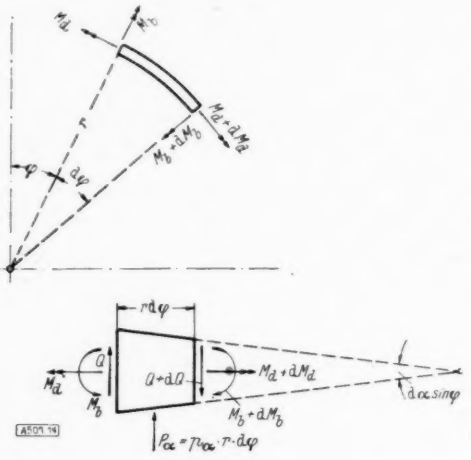


Bild 14.

Um die Beziehungen zu finden, die zwischen σ und τ herrschen, betrachten wir die Schnittkräfte an dem Volumenelement aus der Belastung p_a. Als Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir nach Bild 14

$$\mathrm{d}\,M_d = M_b \cdot \mathrm{d}\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

$$\mathrm{d}\,M_b = -M_d \cdot \mathrm{d}\,\varphi + Q\,r\,\mathrm{d}\,\varphi \quad . \quad (28),$$

$$\mathrm{d}\,Q = p_a \cdot r\,\mathrm{d}\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Da das Biegemoment $M_b = 0$ ist, folgt aus (27) $M_d' = 0$ und damit $M_d = \mathrm{const}$. Danach wird aber nach (28) $Q = \mathrm{const}$. Dies bedeutet jedoch, daß nach (29) $p_a = 0$ ist.

Die Bedingung $p_a = 0$ läßt sich mit Hilfe von (26) folgendermaßen anschreiben:

$$\tau' + \varrho\left(\tau'\cos\varphi - 2\,\tau\sin\varphi - \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,a}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Bei schwach gekrümmten Rohren wird wiederum $\varrho = 0$ gesetzt. In diesem Falle gilt dann:

$$\tau' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

also τ unabhängig von φ. Die Schubspannungen sind damit konstant über den Kreisringquerschnitt verteilt und unabhängig von den Längsspannungen aus der Biegung. Berücksichtigen wir ϱ, so muß (30) voll erfüllt werden.

III. Berechnung der Endverdrehung für $\varrho = 0$ nach dem Prinzip von Castigliano.

Wir wollen die Untersuchung für die Annahme durchführen, daß die Rohrachse nur schwach gekrümmt ist und ϱ mit genügender Genauigkeit gleich Null gesetzt werden kann.

1. Spannungsansätze.

Es werden folgende Ansätze gewählt:

Für die Torsionsspannungen:

$$\tau = \frac{M\sin a}{2\,r^2\,t\,\pi}\left[1 + \sum_1^\infty t_n \cdot \cos n\,\varphi\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Für die Biegespannungen:

$$\sigma = \frac{M\cos a}{r^2\,t\,\pi}\left[\sin\varphi + \sum_1^\infty c_m \cdot \sin m\,\varphi\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\int\int \tau\,r\,\mathrm{d}\,F = M \cdot \sin a$ und $\int\int \sigma\,r \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\,F = M \cdot \cos a$ sind durch die Ansätze erfüllt. Für $\varrho = 0$ folgt aus (31), daß alle t_n gleich Null sind. Die Biegespannung

enthält in diesem Falle nur ungerade m, so daß wir, ohne einen Fehler zu begehen, die Ansätze folgendermaßen abändern können:

$$\tau = \frac{M \sin \alpha}{2 r^2 t \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34),$$

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{r^2 t \pi} [\sin \varphi + \Sigma c_n \cdot \sin (2n+1) \varphi] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35).$$

Die Freiwerte werden wieder nach dem Satze von Castigliano bestimmt.

Die Spannungsenergie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

a) der Spannungsenergie aus der Biegebeanspruchung (mit Querbiegung),

b) der Spannungsenergie aus der Torsion.

Wir ermitteln zunächst die Querbiegung des Ringelements, um dann die Formänderungsarbeit der Lastgruppe I zu berechnen. Dieser Teil genügt bereits zur Bestimmung der Faktoren c_n, da diese Freiwerte im Ansatz der Torsionsspannungen nicht enthalten sind.

2. Querbiegung.

Belastung: An jedem differentialen Teilchen des Ringelements greifen die Lastkomponenten P_φ aus der Änderung des Torsionsmomentes und P_v aus der Abtriebsbelastung der Längsspannungen σ an. Wir erhalten aus diesen äußeren Kräften nach Division mit $r \, d\varphi$ folgende über den Ringumfang verteilte Streckenlasten

$$p_\varphi = \frac{M \cos \alpha \cdot t \cdot d\alpha}{2 r^2 \cdot t \cdot \pi} = \frac{M \cos \alpha}{2 r^2 \pi} d\alpha,$$

$$p_v = \sigma \cdot t \cdot d\alpha = \frac{M \cos \alpha}{r^2 \pi} d\alpha \left[\sin \varphi + \sum_1^\infty c_n \cdot \sin (2n+1) \varphi\right].$$

Die Belastung ist antimetrisch zur Achse $v - v$.

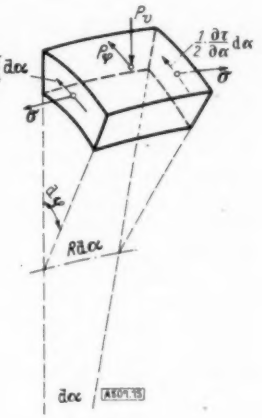


Bild 15.

Querbiegemoment: Für das Biegemoment des statisch unbestimmten Ringes erhalten wir:

$$\mathfrak{M} = -\frac{M \cos \alpha \, d\alpha}{4 \pi} \left\{\sin 2\varphi + \sum_1^\infty \frac{c_n}{n (n+1) (2n+1)} [(n+1) \sin 2n\varphi + n \cdot \sin 2 (n+1) \varphi]\right\} \quad (36).$$

Spannungsenergie: Der Spannungsansatz für σ und das Querbiegemoment $\mathfrak{M}$ gleichen den entsprechenden Funktionen für Biegung in der Krümmerebene nach (11) und (12), nur ist cos durch sin ersetzt. Dies bedeutet, daß die Spannungsenergie für die Normalspannungen den gleichen Aufbau wie (13) besitzt. Wenn wir hierzu noch die innere Arbeit der Gruppe II, die keine Freiwerte enthält, hinzuzählen, so erhalten wir die gesamte Spannungsenergie. Es genügt also, das Minimalprinzip auf die Spannungsenergie der Lastgruppe I anzuwenden. Aus der bereits festgestellten Übereinstimmung des Aufbaues mit der Spannungsenergie nach Gl. (13) erhalten wir für A_I dieselben $\varkappa$-Werte, wie sie in Bild 6 dargestellt sind. Damit gilt für das Ringelement:

$$d A_I = \frac{M^2 \cos^2 \alpha \cdot R \cdot d\alpha}{2 E r^3 t \pi} \cdot \varkappa, \qquad d A_{II} = \frac{M^2 \sin^2 \alpha \cdot R \cdot d\alpha}{4 G \cdot r^3 t \cdot \pi}.$$

$M \cdot \cos \alpha =$ Biegemoment quer zur Krümmerebene des Rohrquerschnitts,

$M \cdot \sin \alpha =$ Torsionsmoment des Rohrquerschnitts.

$$d A = d A_I + d A_{II} = \frac{M^2 R \, d\alpha}{2 E r^3 t \pi} \{\varkappa \cdot \cos^2 \alpha + (1+\nu) \sin^2 \alpha\} \quad \ldots \ldots \quad (37).$$

Die Spannungsenergie eines Rohrbogens ergibt sich durch Integration über α. Die gegenseitige Verdrehung der Endquerschnitte läßt sich nunmehr für jeden Belastungsfall aus der Spannungsenergie ermitteln. ν wird in der gleichen Weise berücksichtigt wie unter B, II.

Die Querverformung ergibt ein Oval, wie es bereits in Bild 2 dargestellt ist, jedoch sind die Symmetrieachsen um 45° gedreht. Infolge der Torsion tritt dann noch eine Verdrillung hinzu, für die das Ringelement als gerader Zylinder von der Länge $R \cdot d\alpha$ aufgefaßt werden kann.

Da die Spannungszustände der beiden untersuchten Fälle: Biegung in der Krümmerebene und quer hierzu, ähnlich sind, ist zu vermuten, daß auch hier der Einfluß von $\varrho = r/R$ auf die Verbiegung gering ist. Deshalb wollen wir auf eine genauere Untersuchung verzichten, da sie wesentlich umfangreicher ist, als die im Abschnitt B unter III durchgeführte. 507

Über die Analyse kurzer Kurvenzüge.

Von *Hans Blume* in Hamburg.

Es wird ein Verfahren zur Feststellung der Voraussetzungen dafür hergeleitet, daß eine kurze Registrierkurve durch eine Summe exponentiell abklingender Wellenzüge konstanter Frequenz dargestellt werden kann. Ein Weg zur Berechnung der dabei auftretenden Konstanten wird gegeben. Da die Methode nicht auf die Darstellung durch solche Komponenten beschränkt ist, wird weiter die Frage erörtert, welche Arten von Wellenzügen zweckmäßig einer Analyse zugrunde zu legen sind.

Die Analyse von Registrierkurven nach persistenten und quasipersistenten Bestandteilen ist mit Hilfe der Periodogrammrechnung möglich (Stumpff, Grundlagen und Methoden der Periodenforschung, Springer, Berlin 1937). Sie lehrt, eine reine Sinuswelle innerhalb einer Registrierkurve mit ihrer wahren Wellenlänge, Amplitude und Phase zu erkennen. Ihre beiden praktisch wichtigsten Hilfsmittel, das Amplituden- und Phasendiagramm, liefern aber nur dann richtige Ergebnisse, wenn der Geltungsbereich der zu analysierenden Kurve groß gegenüber der Länge des Analysenintervalls ist, und versagen in den Fällen, wo der Wellenzug „kurz", d. h. kleiner als das Analysenintervall ist (Stumpff, l. c., S. 127).

In folgendem wird ein Verfahren mit Hilfe der Periodogrammrechnung abgeleitet, durch das angegeben wird, unter welchen Voraussetzungen eine kurze Registrierkurve am zweckmäßigsten durch eine Überlagerung exponentiell abklingender Wellenzüge konstanter Frequenzen dargestellt wird. Ferner wird gezeigt, wie sich die charakteristischen Größen dieser Wellenzüge berechnen lassen. Die Brauchbarkeit der Methode wird an praktischen Beispielen demonstriert. Ihre Anwendbarkeit ist nicht auf die Heranziehung exponentiell abklingender Wellenzüge konstanter Frequenzen zur Darstellung komplizierterer kurzer Kurvenzüge beschränkt. Daher wird weiterhin gezeigt, unter welchen mathematischen Voraussetzungen durch das Analysierverfahren erkannt werden kann, welche Art Wellenzüge zweckmäßig zum Aufbau eines komplizierteren Kurvenzuges heranzuziehen ist. Das Verfahren ist auf die Analyse diskreter Beobachtungsreihen sinngemäß anwendbar.

§ 1. Die Analyse eines kurzen Kurvenzuges in Kosinusform.

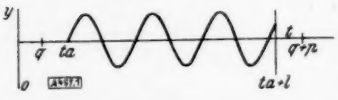


Bild 1.

Zunächst seien einige Definitionen gegeben, die im folgenden benutzt werden: Es sei (Bild 1) $f(t)$ der analytische Ausdruck für einen integrierbaren Kurvenzug. Er soll für einen positiven Bereich der Länge l definiert sein $(0 \leq t_a \leq t \leq t_a + l)$ und „kurz" heißen, wenn l kleiner ist als das Analysenintervall p, mit dem die Analyse vorgenommen wird. Ferner soll immer $t_a + l \leq p$ sein, d. h. das Analysenintervall p soll den Bereich l vollständig einschließen für jeden Anfangspunkt q des Analysenintervalls: $0 \leq q \leq t_a$. In Verallgemeinerung des Integrals für die Fourierkoeffizienten werden folgende Integrale für jeden Parameter x des Bereiches $-\infty < x < +\infty$ gebildet:

$$a(x, q) = \frac{2}{p} \int_{t_a}^{t_a + l} f(t - t_a) \cos(t - q)\, x \, \mathrm{d}\, t \quad \ldots \quad (1\,\mathrm{a}),$$

$$b(x, q) = \frac{2}{p} \int_{t_a}^{t_a + l} f(t - t_a) \sin(t - q)\, x \, \mathrm{d}\, t \quad \ldots \quad (1\,\mathrm{b}),$$

$$a(x, q) + i\, b(x, q) = \frac{1}{p} \int_{t_a}^{t_a + l} f(t - t_a)\, e^{i(t-q)x} \, \mathrm{d}\, t \quad \ldots \quad (2).$$

Setzt man für x die diskrete Zahlenfolge $x = x_n = \frac{2\pi}{p} n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ ein, so erhält man die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten der Funktion $f(t)$ für das Analysenintervall der Länge p. Unter dem Amplitudendiagramm des kurzen Kurvenzuges $f(t)$ versteht man den Ausdruck:

$$h(x, q) = \sqrt{a^2(x, q) + b^2(x, q)} \quad \ldots \quad (3).$$

Hier denkt man sich $h(x, q)$ für einen beliebigen festen Wert $x = x_1$ als Funktion von q oder für einen festen Wert von q als Funktion von x dargestellt. Aus dem Quotienten:

$$k(x,q)=\frac{b(x,q)}{a(x,q)}=\operatorname{tg}\psi(x,q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

bildet man das Phasendiagramm, indem man die zu $\psi(x,q)$ gehörige Bogenlänge für ein festes $x=x_1$ als Funktion von q darstellt. (Bei allen folgenden Untersuchungen ist der harmonische Analysator von Coradi benutzt. Da er den Cosinuswert mit umgekehrten Vorzeichen liefert, werden in den Diagrammen dieser Arbeit die theoretisch errechneten Neigungen von Geraden mit entgegengesetzten Gradienten wiedergegeben.)

Nun sei: $f(t)=c\cos(\alpha t-\beta)$. Nach Einsatz in (2) ergibt die Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} a(x,q)+i\,b(x,q)=&\frac{c}{p}\,l\,\frac{\sin(x-\alpha)\,l/2}{(x-\alpha)\,l/2}\,e^{i\,[(x-\alpha)\,l\,2-x\,q+\alpha\,t_a+\beta]}\\ &+\frac{c}{p}\,l\,\frac{\sin(x+\alpha)\,l/2}{(x+\alpha)\,l/2}\,e^{i\,[(x+\alpha)\,l\,2-x\,q-\alpha\,t_a-\beta]}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2a).$$

Nach Stumpff (l. c., S. 103) ist der zweite Summand als Störvektor vernachlässigbar klein, wenn $l\geq 3\frac{2\pi}{a}$, so daß unter dieser Voraussetzung das Amplituden- und Phasendiagramm allein vom ersten Summanden als Hauptvektor geliefert wird. Da in seinem Argument die Größe q allein mit dem Faktor $-x$ auftritt, kommt also im Phasendiagramm die zugrunde liegende Frequenz a nicht zur Anzeige, wie es bekanntlich für $l\gg p$ der Fall ist. Dies erreicht man jedoch auch für $l<p$, wenn man bei der Analyse folgendermaßen vorgeht: Es sei $t_a=p\geq l$ und die Analyse werde für eine diskrete Wertefolge $q=0, q_1, q_2\ldots$ mit konstantem Analysenintervall p durchgeführt. Man schiebt also schrittweise das Analysenintervall p in den Bereich des Kurvenzuges hinein und führt nach jedem Schritt die Analyse mit dem harmonischen Analysator durch. Dabei hat man drei Fälle zu unterscheiden:

1. Das Intervall p dringt in den Bereich l ein. Dieser Eintrittsvorgang hält an, solange $0\leq q\leq l$ ist.
2. Das Analysenintervall umschließt den Bereich l des Kurvenzuges ganz. Dies gilt für alle $l\leq q\leq p$.
3. Das Intervall p tritt mit seinem Ende in den Bereich l ein. Dies gilt für den Wertebereich $p\leq q\leq p+l$.

Für die drei Fälle muß der Verlauf des Amplituden- und Phasendiagramms betrachtet werden. Von ihnen ist der zweite Fall soeben behandelt worden.

Für den Eintrittsvorgang ergibt sich in komplexer Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} a(x,q)+i\,b(x,q)=&\frac{c}{p}\int_{p}^{p+q}e^{i\,[(x-\alpha)\,t+p\,\alpha-q\,x+\beta]}\,\mathrm{d}\,t+\frac{c}{p}\int_{p}^{p+q}e^{i\,[(x+\alpha)\,t-p\,\alpha-q\,x-\beta]}\,\mathrm{d}\,t\\ =&\frac{c}{p}\,q\,\frac{\sin(x-\alpha)\,q/2}{(x-\alpha)\,q/2}\,e^{i\,[-(x+\alpha)\,q/2+p\,x+\beta]}\\ &+\frac{c}{p}\,q\,\frac{\sin(x+\alpha)\,q/2}{(x+\alpha)\,q/2}\,e^{i\,[-(x-\alpha)\,q\,2+p\,x-\beta]}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5).$$

Der zweite Summand kann als Störvektor vernachlässigt werden, wenn q so groß wird, daß es mindestens drei Wellenlängen der zugrunde liegenden Kosinuskurve umfaßt (Stumpff, l. c. S. 103). Da der Eintrittsvorgang mit $q=l$ abschließt, soll vorausgesetzt werden, daß $l\geq 3\frac{2\pi}{a}$, so daß gegen Ende des Eintrittsvorganges der Einfluß des Störvektors vernachlässigt werden kann. Das Phasendiagramm stellt im wesentlichen das Argument des Hauptvektors von (5) in Abhängigkeit von q graphisch dar. In ihm kommt q nur linear mit dem Faktor $-(x_n+\alpha)\frac{1}{2}$ vor: Für jede Harmonische $x=x_n=\frac{2\pi}{p}(n=1,2\ldots)$ ergibt also das Phasendiagramm eine Gerade mit der Neigung $-(x_n+\alpha)\frac{1}{2}$, so daß aus ihr und der bekannten Harmonischen x_n die Frequenz a bestimmt werden kann. Beim Übergang in den Vorgang 2, in dem das Analysenintervall den gesamten Kosinuskurvenzug umschließt, muß an den Stellen $q=l$ ein Knick im Phasendiagramm auftreten, da für $l\leq q\leq p$ die Neigung bei jeder Harmonischen x_n gleich ist $-x_n$. Dieser Knick ist um so stärker, je mehr die Versuchsfrequenz x_n von der zugrunde liegenden Frequenz a abweicht, und er verschwindet, wenn

$x_n = a$ ist. Beim Übergang in den dritten Teil der Analyse erfolgt ein zweiter Knick im Phasendiagramm, da beim Austrittsvorgang wieder die Neigung $-(x_n + a)\frac{1}{2}$ auftritt.

Aus denselben Gründen muß nach Gl. (5) für $x = a$ das Amplitudendiagramm im Bereich $0 \leq q \leq l$ von Null an bis zum Wert $\frac{c}{p} l$ steigen. Im Bereich $l \leq q \leq p$ ist es konstant und fällt im Bereich $p \leq q \leq p + l$ in gleichem Maße ab, wie es im ersten Teil angestiegen ist. Aus den Knickstellen im Amplitudendiagramm ist l bestimmbar und damit aus der konstanten Amplitudenhöhe $\frac{c}{p} l$ die Amplitude c, da a aus dem Phasendiagramm bekannt ist. Die Phase β ergibt sich, indem man die zu a gehörige Wellenlänge $\frac{2\pi}{a}$ errechnet und nun mit irgendeinem Intervall $p = \frac{2\pi}{a} n \, (n = 1, 2 \ldots)$ mit dem Anfangspunkt $q = t_a = p$ die Kurve nochmals analysiert. Der Quotient $k(a, q) = \frac{b(a, q)}{a(a, q)}$ ergibt die gesuchte Phase nach Gl. (2a).

Dies Verfahren werde am Beispiel des kurzen Kosinuskurvenzuges der Länge $l = 240$ mm und der Form $y = f(t) = 50 \sin\left(\frac{2\pi}{60} t\right)$ mit einem Analysenintervall $p = 340$ mm geprüft. Das Amplitudendiagramm ist in Bild 2 wiedergegeben. Man sieht, daß der Amplitudenverlauf

Bild 3 (rechts).

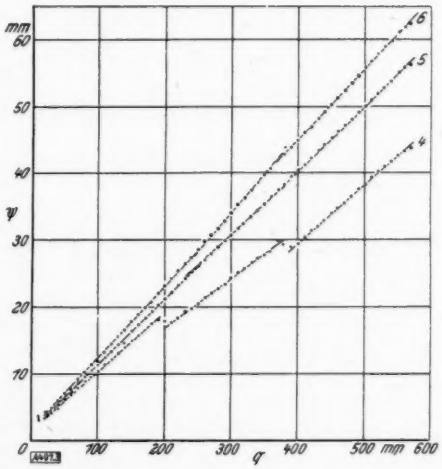
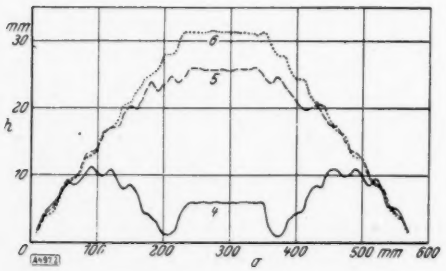


Bild 2 (unten).



der sechsten Harmonischen im konstanten Teil ein Maximum gegenüber dem der übrigen Harmonischen einnimmt, woraus nach Gl. (5) folgt, daß diese Versuchsfrequenz $x_6 = 6$ der gesuchten Frequenz am nächsten kommt. Der Anstieg und Abfall ist leicht wellig infolge der Einflüsse des Störvektors. Die Länge des Anstiegs bzw. Abfalls beträgt 230 mm. Dies wäre also die aus dem Amplitudendiagramm abgelesene Länge des Kurvenzuges, welche in Wirklichkeit 240 mm beträgt. Das Maximum der Amplitudenhöhe ist 31,5 mm. Der Amplitudenverlauf der übrigen Harmonischen wird um so mehr durch den Faktor $\frac{\sin(x - a)\, q/2}{(x - a)\, q/2}$ beeinflußt, je weiter nach Gl. (5) die Harmonischen x_n von der Frequenz a entfernt liegen. In den Amplitudendiagrammen der Harmonischen $x_5 = 5$, und $x_4 = 4$ kommt das deutlich zum Ausdruck. Im Phasendiagramm (Bild 3) ergibt sich der Wert 5,6, während die wahre Frequenz a mit $\frac{340}{60} = 5{,}67$ angezeigt wird. Die Berechnung der Amplitude c geschieht nach Bestimmung von l und a aus der Gl. (5): $c = 51{,}5$ mm. Auch hier liegt bis 3% Übereinstimmung vor. (Auf die Gründe für die Knickstellen im Phasendiagramm der dritten und vierten Harmonischen an den Stellen für q, an denen im zugehörigen Amplitudendiagramm ein Minimum liegt, soll nicht weiter eingegangen werden.)

§ 2. Die Analyse eines kurzen Kurvenzuges mit konstanter Frequenz und exponentiell abklingender Amplitude.

Der Kurvenzug habe die analytische Form: $y = f(t) = c\, e^{-\varrho t} \cos(\alpha t - \beta)$. Die Analyse soll in derselben Weise vor sich gehen, wie im vorigen Paragraphen, d. h. das Analysenintervall wird schrittweise durch den Geltungsbereich l des Kurvenzuges hindurchgeschoben. Dabei enstehen wieder die drei Stadien der Analyse, nämlich das Eintritts-, Mittel- und Austrittsstadium mit denselben Geltungsbereichen für q. Für den Eintrittsvorgang lauten die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten folgendermaßen:

Daraus ergibt sich in komplexer Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} a(x,q) + i\,b(x,q) &= \frac{c}{p}\int_{\mu}^{\mu+q} e^{-\varrho(t-\mu)+i[(x-\alpha)t - xq + \alpha\mu + \beta]}\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{c}{p}\int_{\mu}^{\mu+q} e^{-\varrho(t-\mu)+i[(x+\alpha)t - xq - \alpha\mu - \beta]}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{c}{p}\,\frac{1}{-\varrho + i(x-\alpha)}\left\{e^{-\varrho q + i[x(p-q) - \alpha q + \beta]} - e^{i[x(p-q)+\beta]}\right\} \\ &+ \frac{c}{p}\,\frac{1}{-\varrho + i(x+\alpha)}\left\{e^{-\varrho q + i[x(p-q) + \alpha q - \beta]} - e^{i[x(p-q)-\beta]}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6).$$

Den ersten Summanden nennt man wieder den Hauptvektor, den zweiten den Störvektor. Das Quadrat ihrer Absolutbeträge ist:

$$h_1^2 = \frac{c^2}{p^2\,[\varrho^2 + (x-\alpha)^2]}\left\{e^{-2\varrho q} + 1 - 2\,e^{-\varrho q}\cos q(x-\alpha)\right\} \quad \ldots \quad (6a),$$

$$h_2^2 = \frac{c^2}{p^2\,[\varrho^2 + (x+\alpha)^2]}\left\{e^{-2\varrho q} + 1 - 2\,e^{-\varrho q}\cos q(x+\alpha)\right\} \quad \ldots \quad (6b)$$

Zunächst wird festgestellt, unter welchen Bedingungen der Störvektor gegenüber dem Hauptvektor vernachlässigt werden kann. Zu dem Zwecke wird in den Gl. (6a) und (6b) $x = \alpha$, $q = \frac{2\pi}{\alpha} r$ und $\varepsilon = \frac{\varrho}{\alpha}$ gesetzt und der Quotient gebildet. Man erhält:

$$d^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1 - e^{-2\pi r\varepsilon})^2}\,\frac{1 + e^{-4\pi r\varepsilon} - 2\,e^{-2\pi r\varepsilon}\cos(4\pi r)}{\varepsilon^2 + 4} \quad \ldots \quad (6c).$$

Bei sehr kleinem Wert von ε weicht der exponentiell abklingende Kurvenzug nur wenig von einer reinen Kosinuswelle ab, so daß dann praktisch der im vorigen Paragraphen untersuchte Fall vorliegt. Für beliebige Werte von $\varepsilon \neq 0$ verschwindet d nicht mehr mit unendlich werdenden Werten von r. Man muß dann für die Praxis der Analyse zwei Fälle unterscheiden:

1. Der Wert $\varepsilon = \frac{\varrho}{\alpha}$ ist so klein, daß die Einwirkung des Störvektors auf den Hauptvektor vernachlässigt werden kann. Für die Praxis dürfte es noch tragbar sein, wenn der Absolutbetrag des ersteren höhstens 10% vom letzteren ausmacht. Dann muß $\varepsilon = \frac{\varrho}{\alpha} \leq 0{,}2$ sein. Dieser Fall wird in diesem Paragraphen untersucht.
2. Der Wert $\varepsilon > 0{,}2$. Dieser Fall wird im nächsten Paragraphen behandelt.

Für den Geltungsbereich der zu untersuchenden Kurve würde es genügen, wie eine Auswertung von Gl. 6c lehrt, daß er mindestens drei Wellenlängen umfaßt, damit bei der Analyse am Ende des Eintrittsvorganges und während des Mittelstadiums, wo das Analysenintervall den Geltungsbereich l umschließt, der Störvektor praktisch vernachlässigt werden kann.

Es bleibt noch zu prüfen, welche Einschränkungen für den zu untersuchenden, exponentiell abnehmenden Kurvenzug daraus folgen, daß $\varepsilon = \frac{\varrho}{\alpha}$ den Wert 0,2 nicht überschreiten soll. Nun bedeutet $e^{-\frac{2\pi\varrho}{\alpha}}$ den Faktor, um den die Amplitude verkleinert wird, wenn l um den Betrag der Wellenlänge des kurzen Kurvenzuges wächst. Dieser Faktor ist für den angegebenen Wert ε ungefähr 0,28. Zusammenfassend läßt sich also feststellen: Der Störvektor wird im Höchstfalle 10% des Hauptvektors ausmachen, wenn die Amplitude des Kurvenzuges beim Fortschreiten um eine Wellenlänge nicht unter 28% ihres Betrages fällt

und der Kurvenzug mindestens drei Wellenlängen umfaßt. Diese Verhältnisse sind derart, daß ein erheblicher Bereich der Anwendungen von ihnen erfaßt wird.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für das Amplitudendiagramm nach Gl. (6a) in der Nachbarschaft von $q \leq l$, wenn $x = a$ ist, die Formel:

$$|a(x,q) + i\,b(x,q)| \sim \frac{c}{p\,\varrho}(1 - e^{-\varrho q}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Hieraus folgt, daß das Amplitudendiagramm für solche Harmonischen $x = x_n = \frac{2\pi}{p} n\,(n = 1, 2 \ldots)$, die in genügender Nähe von a liegen, sich in einem exponentiellen Anstieg dem asymptotischen Wert $\frac{c}{p\,\varrho}$ annähert, wobei zu beachten ist, daß diese Annäherung für $q = l$ praktisch erreicht ist. Da dieser Asymptotenwert in dem Amplitudendiagramm durch die Analyse erhalten wird, kann man in der Gl. (7) ihn einsetzen, wodurch man eine Gleichung in ϱ allein erhält. Aus ihr ist ϱ bestimmbar, indem man in dem Amplitudendiagramm zu bestimmten Werten von q die zugehörigen Werte abliest. Kennt man also die Frequenz a, so sind ϱ und c nach Gl. (7) berechenbar.

Zur Bestimmung von a dient das Phasendiagramm. Allerdings kann dieses in dem Stadium des Eintrittsvorganges der Analyse nicht dazu herangezogen werden. Denn nach Gl. (6) hat hier der Hauptvektor unter den gemachten Voraussetzungen in der Nähe von $q = l$ die Form:

$$a(x,q) + i\,b(x,q) \sim \frac{-c}{p} \cdot \frac{1}{-\varrho + (x-a)\,i}\, e^{i[(p-q)x+\beta]}.$$

In diesem Vektor kommt q linear mit dem Koeffizienten $-x$ vor, d. h. das Phasendiagramm, welches im wesentlichen durch diesen Vektor wiedergegeben wird, ist für jede Harmonische x_n gegen Ende des Eintrittsvorgangs eine Gerade mit der Neigung $-x_n\,(n = 1, 2 \ldots)$. Die gesuchte Frequenz a kommt also nicht zur Anzeige.

Man kann beweisen, daß dies im Phasendiagramm des Austrittsvorgangs unter den schon gemachten Voraussetzungen für den kurzen Kurvenzug geschieht. Denn hier ist:

$$\left.\begin{aligned} a(x,q) + i\,b(x,q) &= \frac{c}{p}\int_{q}^{p+l} e^{-\varrho(t-p)+i[(x-a)t-xq+ap+\beta]}\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{c}{p}\int_{q}^{p+l} e^{-\varrho(t-p)+i[(x+a)t-xq-ap-\beta]}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{c}{p}\,\frac{1}{-\varrho+(x-a)\,i}\left\{e^{-l\varrho+i[(x-a)l-x(q-p)+\beta]} - e^{-\varrho(q-p)+i[-aq+ap+\beta]}\right\} \\ &+ \frac{c}{p}\,\frac{1}{-\varrho+(x+a)\,i}\left\{e^{-l\varrho+i[(x+a)l+x(q-p)-\beta]} - e^{-\varrho(q-p)+i[aq-ap+\beta]}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (8a).$$

Der Austrittsvorgang beginnt mit $q = p$ und umfaßt den Bereich $p \leq q \leq p + l$. Unter den gemachten Voraussetzungen können der Störvektor und der erste Summand in der Klammer des Hauptvektors vernachlässigt werden, so daß für das Phasendiagramm in der Umgebung vom $q \geq p$ im wesentlichen folgender Vektor bestimmend ist:

$$a(x,q) + i\,b(x,q) = \frac{-c\,e^{-\varrho(q-p)}}{p\,[-\varrho + (x-a)\,i]}\, e^{i[-aq+ap+\beta]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8b).$$

Ein vollständiger Beweis hierfür wird in folgendem Paragraphen erbracht. In Gl. (8b) erscheint für jede Harmonische $x = x_n = \frac{2\pi}{p} n$ im Argument die Größe q linear mit dem Koeffizienten $-a$, d. h. in der Umgebung von $q \geq p$ entsteht für jede Harmonische eine Gerade mit der Neigung $-a$, und damit ist a bestimmbar geworden. Die Anzeige von a tritt noch dadurch besonders auffällig in Erscheinung, daß das Phasendiagramm im allgemeinen an der Stelle $q = p$ einen Knick besitzt, der an der Stelle $q = l$ nicht auftritt. Denn wie beim Phasendiagramm im Bereich des Eintrittsvorganges bewiesen wurde, ergibt sich gegen Ende des Bereiches $0 \leq q \leq l$ für jede Harmonische x_n ein Gradenstück mit der Neigung $-x_n$. Sobald der Eintrittsvorgang beendet ist, geht die Analyse in das Stadium über, in dem der Geltungsbereich l des kurzen Kurvenzuges ganz umschlossen ist. Dann gilt für den verallgemeinerten Fourierkoeffizienten in komplexer Form:

$$
\left.\begin{aligned}
a(x,q)+ib(x,q) &= \frac{c}{p}\int_{p}^{p+l} e^{-\varrho(t-p)+i[(x-\alpha)t-xq+\alpha p+\beta]}\,dt \\
&+\frac{c}{p}\int_{p}^{p+l} e^{-\varrho(t-p)+i[(x+\alpha)t-xq-\alpha p-\beta]}\,dt \\
&=\frac{c}{p}\,\frac{1}{-\varrho+i(x-\alpha)}\left\{e^{-l\varrho+i[(x-\alpha)(p+l)-xq+\alpha p+\beta]}-e^{i[(x-\alpha)p-xq+\alpha p+\beta]}\right\} \\
&+\frac{c}{p}\,\frac{1}{-\varrho+i(x+\alpha)}\left\{e^{-l\varrho+i[(x+\alpha)(p+l)-xq-\alpha p-\beta]}-e^{i[(x+\alpha)p-xq-\alpha p-\beta]}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (9).
$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist hier ausschlaggebend allein der Vektor:

$$
a(x,q)+ib(x,q)\sim\frac{-c}{p}\,\frac{1}{-\varrho+i(x-\alpha)}\,e^{i[(p-q)x+\beta]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a).
$$

Seine Amplitude ist von q unabhängig und infolgedessen das Amplitudendiagramm jeder Harmonischen x_n konstant. Das Argument ist linear in q mit dem Koeffizienten $-x_n$ für jede Harmonische x_n. Daher kommt im Phasendiagramm die Frequenz α nicht zur Anzeige und an der Stelle $q=l$ tritt kein Knick auf. Da aber von $q=p$ an die zugrunde liegende Frequenz α angezeigt wird, muß an dieser Stelle im Phasendiagramm ein Knick auftreten. Er wird um so stärker sein, je weiter die Versuchsfrequenz x_n von α abweicht, und verschwindet für $x_n=\alpha$. Diese Verhältnisse lassen eine genaue Bestimmung von α aus dem Phasendiagramm im Stadium des Austrittvorganges der Analyse erwarten.

Da mit der Kenntnis von α die Berechnung von ϱ und c möglich ist, wie schon gezeigt wurde, so sind die charakteristischen Größen $\alpha, \varrho, c, \beta$ des kurzen Kurvenzuges bestimmbar.

Das Verfahren wird an einem Beispiel erläutert und geprüft. Es sei (Bild 4):

$$
y=f(t)=50\,e^{-0{,}0415\,t}\cos\left(\frac{2\pi}{34}t\right)=50\,e^{-0{,}0415}\cos(0{,}185\,t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).
$$

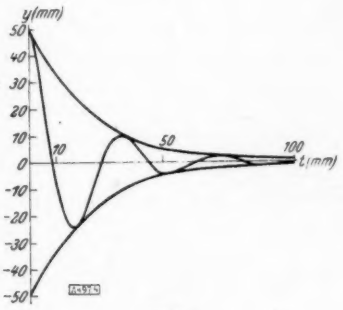


Bild 4.

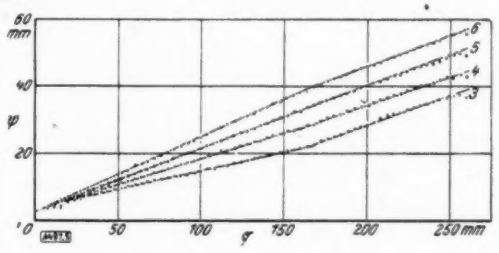


Bild 5 (oben rechts).

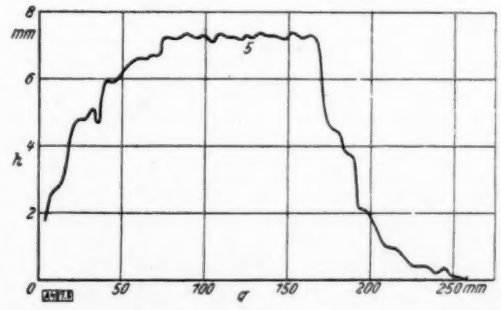


Bild 6 (rechts).

Hier ist $\varepsilon=\frac{\varrho}{\alpha}=0{,}22$. Da diese Kurve mit $p=168$ mm analysiert wird, so muß die Frequenz α mit der Größe $168:34=4{,}94$ im Phasendiagramm zur Anzeige kommen. Bild 5 zeigt das Phasendiagramm. Hier kommt der theoretisch abgeleitete Verlauf, insbesondere die Knickstelle und die Parallelität, klar zum Ausdruck. Für die Frequenz ergibt sich aus der Neigung der parallelen Stücke der Wert 4,8. Im Amplitudendiagramm (Bild 6) ist der besseren Übersicht wegen nur diejenige Harmonische $x_5=5$ gezeichnet, welche der wahren Frequenz am nächsten liegt und daher den höchsten Asymptotenwert von 7,25 mm erreicht, d. h.

$\frac{c}{p\,\varrho} = 7{,}25$. Nach Gl. (7) erhält man für den Amplitudenverlauf im Stadium des Eintrittsvorganges für ϱ die Gleichung:

$$|a(a,q) + i\,b(a,q)| = 7{,}25\,(1 - e^{-\varrho q}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7').$$

Die bei der Analyse auftretenden Schwankungen im Amplitudenverlauf sind auf die Einwirkung des Störvektors zurückzuführen.

Die Bestimmung des Exponentialkoeffizienten mit Hilfe der Gl. (7) aus dem Amplitudenverlauf ergibt folgende Wertetabelle:

q	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72
$\varrho \cdot 10^{-3}$	43	38	37	41	44	44	40	42	42	38	39	39

Als Mittelwert ergibt sich $\varrho = 0{,}042$. Man sieht, daß man einen ziemlich genauen Wert für ϱ erhält, ohne daß man sich auf einen zu engen Bereich für q beschränken braucht. Durch Einsetzen von ϱ in $\frac{c}{p\,\varrho} = 7{,}25$ errechnet man: $c = 168 \cdot 0{,}042 \cdot 7{,}25 = 51$ mm.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß durch das abgeleitete Analysierverfahren die charakteristischen Größen der zugrunde liegenden Kurve mit einer Genauigkeit von 2% bestimmt werden können.

§ 3. Die Trennung zweier verschiedener kurzen Kurvenzüge mit exponentiell abklingender Amplitude.

Die analytische Form der Kurvenzuges sei:

$$y = f(t) = c_1\,e^{-\varrho_1 t}\cos(a_1 t - \beta_1) + c_2\,e^{-\varrho_2 t}\cos(a_2 t - \beta_2) \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Der verallgemeinerte Fourierkoeffizient dieser Summe ist gleich der Summe der verallgemeinerten Fourierkoeffizienten der beiden Summanden. Setzt man zunächst voraus, daß für jeden Summanden die [im § 2] gemachten Voraussetzungen gelten, so wird für den Austrittsvorgang in der Analyse der verallgemeinerte Fourierkoeffizient im Bereich $p \le q \le p + l$ folgenden Wert besitzen:

$$\left.\begin{aligned} a(x,q) + i\,b(x,q) \sim {} & \frac{-c_1}{p}\,\frac{e^{-\varrho_1(q-p)}}{-\varrho_1 + i\,(x-a_1)}\,e^{i[-a_1 q + a_1 p + \beta_1]} \\ & - \frac{c_2}{p}\,\frac{e^{-\varrho_2(q-p)}}{-\varrho_2 + i\,(x-a_2)}\,e^{i[-a_2 q + a_2 p + \beta_2]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{1}{-\varrho_\nu + (x-a_\nu)\,i} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_\nu^2 + (x-a_\nu)^2}}\,e^{i\chi_\nu}, \quad \text{wo } \operatorname{tg}\chi_\nu = \frac{-(x-a_\nu)}{-\varrho_\nu} \text{ ist,} \\ & h_\nu = \frac{c_\nu\,e^{-\varrho_\nu(q-p)}}{\sqrt{\varrho_\nu^2 + (x-a_\nu)^2}}, \quad \psi_\nu = -a_\nu q + a_\nu p + \beta_\nu + \chi_\nu, \quad \varphi_\nu = \psi_\nu + \pi, \quad (\nu = 1,2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12a).$$

Dann erhält man:

$$a(x,q) + i\,b(x,q) \sim h_1\,e^{i\varphi_1} + h_2\,e^{i\varphi_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12b).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, die Verteilung der Indizes sei so gewählt, daß $h_1 > h_2$. Die Vektorsumme (12b) wird in einer komplexen Ebene aufgetragen (Bild 7). Durch Anwendung des Sinussatzes erhält man nach Stumpff, l. c., S. 122:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{h_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{h_1 + h_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13a).$$

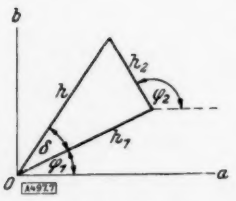


Bild 7.

Es sei zunächst folgendes angenommen: Wenn q von p bis $p + l$ wächst, so bleibe in diesem Bereich des Austrittsstadiums der Analyse $h_1 > h_2$ für dieselbe Frequenz. In der Vektorebene dreht sich dann der Vektor $h_1\,e^{i\varphi_1}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-a_1$ um den Nullpunkt, während der Vektor $h_2\,e^{i\varphi_2}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-a_2$ um den Endpunkt des ersteren rotiert. Der resultierende Vektor bildet mit dem ersteren den Winkel δ. Dieser Winkel besitzt nach Gl. (13a) ein Maximum für den Fall:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{h_2}{h_1}.$$

Der Wert dieses Maximums ist nach Gleichung (13a):

$$\operatorname{tg}\delta_m = \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 - h_2^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist reell, da $h_1 > h_2$. Der Winkel δ_m ist immer kleiner als $\pi/2$ und hat im Grenzfall $h_1 = h_2$ den Grenzwert $\pi/2$ für $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. Daraus folgt: Der Winkel des resultierenden Vektors mit der waagerechten Achse in der Vektorebene ist $\psi(q) = \varphi_1(q) + \delta(q)$ im Bereich $p \le q \le p + l$. Dieser Winkel besteht also aus einer Überlagerung des Winkels $\delta(q)$ über den Winkel φ_1, der sich seinerseits mit der Winkelgeschindigkeit $-a_1$ gleichförmig um den Nullpunkt dreht. Trägt man daher die Bogenlänge von $\psi(q)$ als Funktion von q auf, wie dies im Phasendiagramm geschieht, so erhält man eine Wellenlinie, deren Mittellinie mit der q-Achse den konstanten Winkel $-a_1$ bildet und deren Periodenlänge Q beträgt:

$$Q = \frac{2\pi}{a_2 - a_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}(n_2 - n_1)} = \frac{p}{n_2 - n_1}.$$

Bild 8 zeigt schematisch den beschriebenen Verlauf des Phasendiagramms an. Ist die Periodenlänge Q mindestens einmal ganz im Bereich $p \le q \le p + l$ enthalten, so ist also a_1 aus dem Phasendiagramm grundsätzlich bestimmbar. Dies wird praktisch um so besser möglich sein, je kleiner h_2 gegenüber h_1 ist.

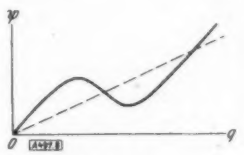


Bild 8.

Hieraus folgert für die Analyse das wichtige Ergebnis:

Liegt der Analyse ein kurzer Kurvenzug mit dem analytischen Ausdruck der Gl. (11) zugrunde, so wird im Austrittsstadium des Phasendiagramms jede Harmonische $x = x_n = \frac{2\pi}{p} n \; (n = 1, 2, \ldots)$ diejenige von den beiden zugrunde liegenden Frequenzen a_1, a_2 anzeigen, für welche die Amplitude h_ν in der Vektorebene die größere ist:

$$h_\nu = \frac{c_\nu e^{-\varrho_\nu (q-p)}}{p\sqrt{\varrho_\nu^2 + (x - a_\nu)^2}} \; (\nu = 1, 2).$$

Dies besagt zunächst einmal, daß beim Vorliegen eines einzigen Kurvenzuges nach § 2 der Störvektor die Frequenzbestimmung aus dem Phasendiagramm des Hauptvektors grundsätzlich nicht beeinträchtigen kann, wie groß auch $\varepsilon = \varrho : a$ sein mag. Denn in diesem Falle ist $a_2 = -a_1$, $c_2 = c_1$, $\varrho_2 = \varrho_1$ und infolgedessen der Wert h_ν des Hauptvektors immer größer als derjenige des Störvektors, der nur positive Werte besitzt beim harmonischen Analysator. Außerdem ist der Austrittsvorgang von der Länge $l \ge 3\frac{2\pi}{a_1} = 6\frac{\pi}{a_1}$, während die Periode der im Phasendiagramm auf der Harmonischen $x_n = a_1$ erscheinenden Störwelle die Länge $Q = \frac{2\pi}{a_2 - a_1} = \frac{\pi}{a_1}$ besitzt. Q ist also achtmal im Bereich des Austrittsvorganges enthalten. Sind darüber hinaus noch die Voraussetzungen von § 2 über ε erfüllt, so ist $h_2 \le \frac{1}{10} h_1$ und infolgedessen die Anzeige der Neigung a_1 im Phasendiagramm praktisch ungestört. Von dieser Tatsache wurde im Beispiel am Schluß des letzten Paragraphen Gebrauch gemacht.

Ist für eine Harmonische die Voraussetzung $h_2 < h_1$ nicht erfüllt, sondern $h_2 = h_1$, so kommt im Phasendiagramm dieser Harmonischen keine der beiden Frequenzen zum Vorschein. Sie trennt die übrigen Harmonischen x_n in zwei Klassen, von denen die Angehörigen der einen die Frequenz a_1 und die der andern a_2 anzeigen, so daß dennoch grundsätzlich beide Frequenzen bestimmt werden können, wenn genügend Harmonische vorliegen. Dies wird insbesondere dadurch immer erreicht werden können, daß man das Analysenintervall genügend groß wählt, damit die Werte vieler Harmonischen $x = x_n = \frac{2\pi}{p} n \; (n = 1, 2 \ldots)$ zwischen den Frequenzen $a_1 = \frac{2\pi}{p} n_1$ und $a_2 = \frac{2\pi}{p} n_2$ liegen. Ist z. B. $c_1 = c_2$, $\varrho_2 = \varrho_1 = \varrho$, so wird:

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{(p\varrho)^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2}{(p\varrho)^2 + 4\pi^2 (n - n_2)^2}} \qquad (n_1 > n_2).$$

Für alle Harmonischen $x_n \left(n > \frac{n_1 + n_2}{2} \right)$ wird die Frequenz a_1 bzw. n_1 und für die Harmo-

nischen $x_n\left(n<\frac{n_1+n_2}{2}\right)$ die Frequenz a_2 bzw. n_2 angezeigt. Durch die Harmonische $x_n\left(n=\frac{n_1+n_2}{2}\right)$ wird weder a_1 noch a_2 erkennbar sein.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß es in der Praxis im allgemeinen möglich sein wird, die beiden zugrunde liegenden Frequenzen ziemlich genau zu bestimmen, wenn man einen Analysator mit hoher meßtechnischer Präzision verwendet, wie dies z. B. bei dem Analysator von Coradi der Fall ist.

Die Ableitungen über die prinzipielle Trennbarkeit zweier Frequenzen werden verwickelter, wenn im Bereich des Austrittsvorganges die Größenverhältnisse h_1 und h_2 für eine bestimmte Harmonische x_n nicht konstant sind, sondern wechseln. Dies zwingt in der Praxis der Periodogrammanalyse zur Vorsicht, beeinträchtigt sie jedoch, wie die Erfahrung zeigt, in keiner Weise entscheidend.

Hat man die Frequenzen a_1 und a_2 auf die angegebene Weise bestimmt, so kann man durch passende Wahl des Analysenintervalls grundsätzlich erreichen, daß jede der beiden Frequenzen mit einer Harmonischen zusammenfällt. Liegen diese Frequenzen genügend weit auseinander, so bestimmt man aus dem Amplitudenverlauf dieser Harmonischen die Werte ϱ_ν und c_ν $(\nu=1,2)$ in der Weise, wie es im zweiten Paragraphen dargestellt wurde, ohne auf die gegenseitige Beeinflussung der beiden Wellen Rücksicht zu nehmen. Sind beide Wellen benachbart, so berechnet man zunächst die Größe ϱ_ν wie im zweiten Paragraphen angegeben ist, da in diesem Falle meistens, z. B. bei Stoßvorgängen, zu erwarten sein wird, daß diese beiden Exponenten im wesentlichen übereinstimmen. Diesen gemeinsamen Wert legt man als Exponenten für beide Frequenzen der weiteren Rechnung zugrunde. Bei der nun folgenden Bestimmung der beiden Amplituden c_ν hat man jedoch die gegenseitige Beeinflussung der Wellen mit den Frequenzen a_1 und a_2 zu berücksichtigen. Man geht dabei wieder von Gl. (12b) aus. Für den resultierenden Vektor ergibt sich nach Bild 7 durch Anwendung des Kosinussatzes:

$$h^2(x,q)=h_1^2(x,q)+h_2^2(x,q)+2\,h_1(x,q)\,h_2(x,q)\cos\varphi' \qquad \varphi'=\varphi_2-\varphi_1 \tag{14}$$

Da a_1, a_2, ϱ_1 und ϱ_2 bekannt sind, ist φ' für jeden Punkt des Phasendiagramms berechenbar. Besonders einfach und daher für die Praxis wichtig ist es, Stellen q im Phasendiagramm zu finden, an denen φ' gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π ist, weil dann die rechte Seite von Gl. (14) ein reines Quadrat wird und somit eine lineare Gleichung vorliegt. Dieser Fall wird an dem Beispiel der Analyse einer Stoßkurve im folgenden Paragraphen dargelegt. Grundsätzlich erreicht man aus Gl. (14) zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten c_1 und c_2, indem man der Reihe nach $x_1=a_1$ bzw. a_2 setzt. Dabei ändert sich $\cos\varphi'$ nicht. Allerdings ist vorausgesetzt, daß man die Phasen β_1 und β_2 der Originalkurven nach Gl. (11) kennt. Dies ist bei Stoßkurven der Fall, da hier erfahrungsgemäß $\beta_1=\beta_2=90°$ ist.

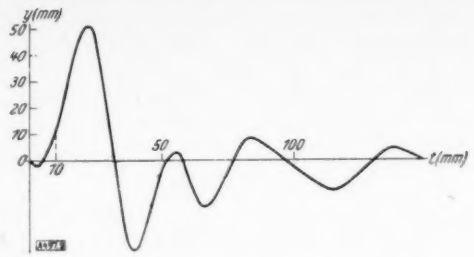
Bisher war in diesem Paragraphen vorausgesetzt, daß der Einfluß des Störvektors auf den Hauptvektor vernachlässigbar klein sei. Ist das nicht der Fall, so kann es sein, daß die beiden Frequenzen a_1 und a_2 so weit auseinanderliegen, daß sie sich nicht wesentlich stören. Dann können mit den aus den Phasendiagrammen bestimmten Frequenzen die Größen ϱ_1 und ϱ_2 berechnet werden, wie im zweiten Paragraphen angegeben ist. Bei der Berechnung von c_1 und c_2 berücksichtigt man dann nicht die gegenseitige Beeinflussung, sondern nur den des Störvektors unter Anwendung von Gl. (14).

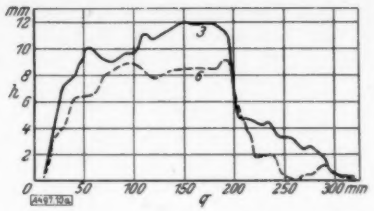
Verwickelter werden die Verhältnisse, wenn weder der Einfluß des Störvektors jeder Frequenz noch ihre gegenseitige Beeinflussung vernachlässigt werden können. Die Frequenzbestimmung ist jedoch auch in diesem Falle genau durchführbar, wenn für beide Frequenzen nach Gl. (9a) der erste Summand im Haupt- und Störvektor vernachlässigt werden kann, d. h. wenn $e^{-l\varrho}$ genügend klein ist. Dies dürfte für einen erheblichen Bereich der Praxis erfüllt sein. Die Bestimmung von ϱ, c_1 und c_2 wird ungenauer, da ja dem reinen Amplitudenabfall nach dem Exponentialgesetz sich mehrere störende Periodizitäten überlagern. In der Praxis braucht man hierbei jedoch nicht so ängstlich zu sein, wie das auf den ersten Blick scheinen könnte, wie das Beispiel im nächsten Paragraphen zeigen wird.

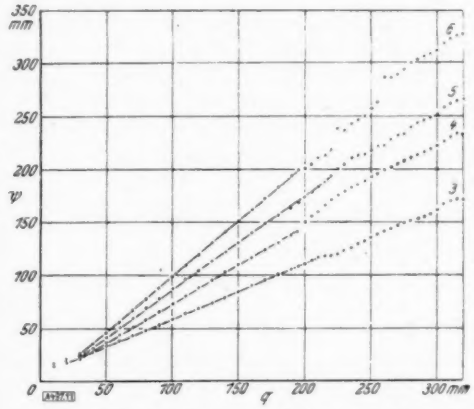
§ 4. Die Analyse eines experimentell gemessenen Stoßvorgangs.

Die Verwendbarkeit der dargelegten Analysiermethode soll an einer Registrierkurve, die durch die Messung eines kurzen Stoßvorganges mit einem Schwingwegmesser erhalten wurde, erprobt werden. Die Kurve[1]) stellt die vertikale Schwingung einer Betonstraße dar, welche dadurch entsteht, daß ein Lastwagen mit Vollgummireifen über einen fünf Zentimeter hohen Keil fährt. Die Originalkurve ist in Bild 9 wiedergegeben.

[1]) Z. Instrumentenkde. Bd. 62 (1942), S. 361.







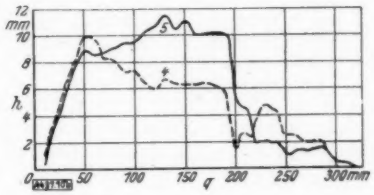


Bild 9 (links oben).
Bild 10a (rechts oben),
Bild 10b (rechts unten),
Bild 11 (links unten).

Für die Analyse wurde sie durch optische Abbildung auf einen Bereich von $1 = 143$ mm vergrößert und mit einer Analysenintervallänge von $p = 177$ mm analysiert. Bild 11 gibt das dabei erhaltene Phasendiagramm der vier Harmonischen $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$ wieder. Auf der waagerechten Achse sind diejenigen Werte q verzeichnet, die bei der schrittweisen Analyse der Reihe nach als Anfangspunkte des Analysenintervalls p genommen wurden. Im Bereich von 0 bis 190 mm hatten diese Punkte einen Abstand von 10 mm, von da bis zum Schluß der Analyse einen solchen von 5 mm. Als Ordinaten sind die Bogenlängen des Winkels $\psi(n, q)$ aufgetragen, wobei $\operatorname{tg} \psi(n, q) = \dfrac{b(n, q)}{a(n, q)}$ für jede Harmonische $x = x_n = \dfrac{2\pi}{p} n \; (n = 1, 2 \ldots)$ ist. Der Wert $b(n, q)$ ist der am Analysator abgelesene Sinuswert für den Fall, wo das Analysenintervall von $p = 177$ mm im Punkt q beginnt, $a(n, q)$ ist der zugehörige Kosinuswert. Die Tatsache, daß im Phasendiagramm für alle Harmonischen gradlinige Fortführung über $q = 180$ mm bis $q = 195$ mm eintritt, ist darauf zurückzuführen, daß zu Beginn der Registrierkurve der Einschwingvorgang wirksam ist. Während jedoch von $q = 195$ an diese Gerade bei der vierten und sechsten Harmonischen verlassen wird, setzt sie sich bei der dritten bis zum Wert $q = 210$ und bei der fünften bis $q = 220$ fort. Bei der dritten Harmonischen ergibt eine rechnerische Neigungsermittelung zwischen 225 und 300 den Wert 2,97, d. h. nach einer Phasenverschiebung zwischen 210 und 225 setzt sich die frühere Neigung fort. Der unregelmäßige Verlauf von $q = 300$ an bei allen Harmonischen beruht darauf, daß die Meßgenauigkeit des Analysators unterschritten ist. Die dritte Harmonische besitzt das größte Maximum. Auf Grund der dargelegten Theorie wird angenommen, daß die durch sie angezeigte Frequenz $n = 3$ im gesamten Kurvenzug wirklich vorkommt. Sie ist gleich 13 Hertz. Der Amplitudenverlauf Bild 10a und 10b der fünften Harmonischen im zweiten Stadium der Analyse $160 \leq 9 \leq 190$ zeigt das zweitgrößte Maximum, während im gleichen Bereich die dazwischenliegende vierte Harmonische das kleinste Maximum besitzt. Da die Neigung der fünften Harmonischen sich bis $q = 220$ fortsetzt, wird angenommen, daß auch die ihr zugehörige Frequenz von 22,5 Hertz in der Kurve wirklich vorkommt. Im Bereich $220 \leq 9 \leq 300$ zeigt diese Harmonische eine andere Neigung an, deren rechnerisch ermittelter Wert 4,1 beträgt. Im gleichen Bereich des Amplitudendiagramms erkennt man, daß die Amplitude der vierten Harmonischen die der fünften erheblich übersteigt. Daraus kann geschlossen werden, daß die Frequenz von 22,5 Hertz nur noch schwach im Auslauf der Kurve vorkommt und ihre Anzeige von der stark auftretenden Frequenz 18,5 Hertz, die dem Neigungswert 4,1 entspricht, unterdrückt wird, wie früher theoretisch begründet wurde. Das Phasendiagramm der vierten Harmonischen verläßt in krassem Sprung die Neigung $n = 4$ und zeigt die Tendenz, im Bereich $200 \leq 9 \leq 220$ sich der Neigung $n = 5$ anzupassen und am Ende dieses Bereiches

in eine Neigung $n = 3{,}8$ (16,5 Hertz) überzugehen. Tatsächlich liegt ihre Amplitude in diesem Bereich tief unter allen anderen. Nach der Theorie muß man daher annehmen, daß die Frequenz 16,5 Hertz vernachlässigbar klein im Kopf der Kurve vorkommt. Der kurze übergroße Anstieg der vierten Harmonischen wird dabei unberücksichtigt gelassen. Demgegenüber kommt offenbar die Frequenz 16,5 Hertz im Auslauf der Kurve vor, wie schon besprochen wurde. Das Phasendiagramm der sechsten Harmonischen ist ab $q = 195$ unregelmäßig, ihre Amplitude fällt schnell zu kleinsten Werten ab. Daher wird angenommen, daß keine wirklich vorkommende Frequenz von nennenswerter Amplitude zu ihr gehört. Zusammenfassend wird festgestellt, daß in dem hauptsächlich interessierenden Teil, dem Kopf der Kurve, die beiden Frequenzen 13 und 22,5 Hertz bestimmend sind. Diese sollen daher allein berücksichtigt werden.

Die nächste Aufgabe ist die Bestimmung des Exponentialabfalls für diese beiden Frequenzen. Zu dem Zweck zieht man die Gl. (8) heran, die den Anstieg der Amplitude im Eintrittsstadium der Analyse wiedergibt. Für die dritte Harmonische ist der asymptotisch erreichte Höchstwert $h_{m3} = 11{,}80$, so daß zur Bestimmung von ϱ_3 die Gleichung vorliegt:

$$|a(3, q) + i\,b(3, q)| = 11{,}8\,(1 - e^{-\varrho q}).$$

Ihre linke Seite kann aus dem Amplitudendiagramm zu jedem Wert q abgelesen werden. Die Errechnung von ϱ_3 ergibt folgende Wertetabelle:

q	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$\varrho_3 \cdot 10^{-2}$	1,96	3,15	2,93	3,54	2,96	2,24	1,85	1,85	1,70	2,56	2,02	2,16	3,30	—

Der Mittelwert ist $\varrho_3 = 0{,}025$. Auf dieselbe Weise verfährt man mit der fünften Harmonischen, wobei als Asymptotenwert $\frac{c_5}{p\,\varrho_5} = 10{,}1$ angenommen wird. Dies ist der Wert, den die Amplitude im zweiten Stadium der Analyse besitzt, wo das Analysenintervall den gesamten Kurvenbereich umfaßt. Die im Anfangsstadium der Analyse erhaltenen Werte, welche größer als dieser Wert sind, scheiden bei der Bestimmung von ϱ_5 aus. Dann erhält man folgende Tabelle:

q	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\varrho_5 \cdot 10^{-2}$	2,08	2,62	3,33	4,46	3,26	2,92	2,82	2,95	2,92

Aus ihr ergibt sich $\varrho_5 = 0{,}030$. Der weiteren Rechnung wird für beide Frequenzen derselbe Wert $\varrho = 0{,}028$ zugrunde gelegt.

Zur Bestimmung der beiden Amplituden c_3 und c_5 dient die Gl. (14), wobei es zwecks Vereinfachung der Rechnung wichtig ist, eine Stelle zu finden, an welcher der Wert von $\cos\varphi' = 1$ ist. Zunächst wird angenommen, daß die Phasenlage jeder der beiden abklingenden Wellen gleich 90 Grad ist. Dann ist:

$$\varphi' = \varphi_2 - \varphi_1 = -(a_2 - a_1)(p - q) + (\psi_2 - \psi_1).$$

Der Einsatz der bekannten Werte ergibt $\psi_1 = 0$ und $\psi_2 = -110°$. Daraus folgt, daß nach einer Phasenverschiebung $-(a_5 - a_3)(p - q) = 110°$ der Winkel $\varphi' = 0$ ist. Dies entspricht einem Wert $p - q$ von -27. Es wurde schon erwähnt, daß der Einschwingvorgang die genaue Größe des Wertes q, für den im Sinne der dargelegten Theorie der Austrittsvorgang beginnt, nicht bekannt ist. Aus dem Verlauf der Registrierkurve kann man entnehmen, daß dies zwischen q gleich 180 und 185 der Fall ist. Diese Annahme wird durch andere Überlegungen noch bestätigt werden. Hieraus folgt, daß der Wert q, für den die Phasenverschiebung $\varphi' = 0$ beträgt, bei beiden Amplitudendiagrammen $n = 3$ und $n = 5$ in der Nähe von $q = 210$ liegen muß. Tatsächlich besitzen beide Diagramme hier einen Wendepunkt. Diese Tatsache kann als eine Bestätigung dafür angesehen werden, die gesuchte Stelle richtig gefunden zu haben, und zwar aus folgendem Grunde: Nach Gl. (14) besteht das Quadrat des Amplitudendiagramms aus der Überlagerung eines aperiodischen Teiles $h_1^2 + h_2^2$ und einem Teil $2 h_1 h_2 \cos\varphi'$, der mit der Periode von φ' exponentiell abklingt. In letzterem ist die Differenz für zwei sehr benachbarte Werte von q an den Stellen seiner Maxima bzw. Minima am kleinsten. Diese liegen aber sehr nahe an den Stellen, an denen $\cos\varphi' = \pm 1$ ist. Andererseits kann aus dieser Übereinstimmung, die sich aus der Rechnung unter Verwendung der ermittelten Werte für a_3, a_5 und ϱ ergeben hat, geschlossen werden, daß man diese Größen annähernd richtig bestimmt hat. Unter diesen Bedingungen, d. h. für $p - q = -27$, erhält man aus Gl. (14) folgende beiden linearen Gleichungen zur Bestimmung von c_3 und c_5:

$$h(a_3) = \left\{ \frac{c_3}{p\,\varrho} + \frac{c_5}{\sqrt{(p\,\varrho)^2 + 4\,\pi^2\,(n_3 - n_5)^2}} \right\} e^{-(q-p)\varrho},$$

$$h(a_5) = \left\{ \frac{c_3}{\sqrt{(p\,\varrho)^2 + 4\,\pi^2\,(n_3 - n_5)^2}} + \frac{c_5}{p\,\varrho} \right\} e^{-(q-p)\varrho}.$$

Der Einsatz der Werte für $q = 205$ aus dem Amplitudendiagramm liefert $c_3 = 38{,}5$; $c_5 = 35$, so daß die Analyse folgendes Ergebnis hat:

$$y = 38{,}5\, e^{-0{,}028\,t} \sin\left(2\pi \frac{3}{177}\, t\right) + 35\, e^{-0{,}028\,t} \sin\left(2\pi \frac{5}{177}\, t\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Zum Vergleich mit der Originalkurve ist die Funktion (15) im gleichen Maßstab in Bild 12 wiedergegeben. Vorzüglich ist die Wiedergabe des wichtigsten Teiles der Kurve, nämlich des Anfangsstückes bis zum ersten Nulldurchgang. Im übrigen ist der Charakter der Kurve wesentlich erfaßt, wie man aus einem Vergleich der Lage gleichartiger Maxima, Nullstellen und Minima beider Kurven ersieht. Zu dem Zwecke muß man von dem Einschwingungsvorgang der Originalkurve absehen und einen andern Anfangspunkt bestimmen. Deswegen trägt man den Wert der ersten Nullstelle in Gl. (15) von der ersten Nullstelle der Originalkurve nach links ab. Man erhält so den Punkt 0 als Nullpunkt in der letzteren. Die Aufeinanderfolge der genannten charakteristischen Stellen in beiden Kurven wird durch folgende Tabelle dargestellt:

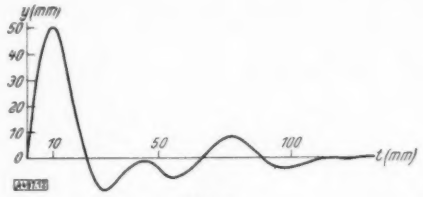


Bild 12.

Synthetische Kurve	0	12	22	30	45	56	67	77	86	105
Originalkurve	0	10	22	30	43	57	67	77	88	109

§ 5. Schlußfolgerungen und Erweiterungen.

Aus den vorhergehenden Darlegungen ergibt sich für die Praxis der Analyse von Stoßvorgängen, daß es im allgemeinen nicht gerechtfertigt ist, den ersten Hauptbogen der Registrierkurve als sinusförmige Annäherung einer bestimmten Frequenz aufzufassen und diese dann als sogenannte „Stoßfrequenz" bzw. „Stoßamplitude" für die Umrechnung auf Schwingweg, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu benutzen. Die bisher festgestellte Unmöglichkeit, die Registrierkurven eines Stoßvorganges, der gleichzeitig mit einem Schwingweg-, Schwingungsgeschwindigkeits- und Schwingungsbeschleunigungsmesser aufgenommen wurde, in eine mathematische Zuordnung bringen zu können[2]), dürfte mit auf diesen Umstand zurückzuführen sein und ist Gegenstand weiterer Untersuchungen.

Das formale Prinzip der geschilderten Analysiermethode ist nicht auf die hier behandelte Heranziehung exponentiell abklingender Wellenzüge konstanter Frequenzen als Aufbauelemente für komplizierter abklingende Kurvenzüge beschränkt, wenn diese auch ihren praktisch wichtigsten Fall darstellt. Die Anwendung auf linear abfallende Wellenzüge konstanter Frequenz zum Aufbau komplizierterer Kurvenzüge verläuft analog. Das zugrunde liegende formale Prinzip läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Es sei

$$y = f(\xi) \cdot e^{i(\gamma \xi + \delta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

der Typ der Funktionen, die zum Aufbau eines komplizierteren, kurzen Kurvenzuges dienen sollen. Da diese Aufbaufunktion einfach sein soll, ist es hinreichend, von der reellen Funktion $f(\xi)$ vorauszusetzen, daß sie für positive wachsende Werte von ξ eine stetig abnehmende Funktion sei. Ihr Integral wird dann bei Variabilität der einen Integrationsgrenze und Konstanthaltung der anderen eine Funktion folgender Form sein:

$$y = F(\xi, \gamma) \cdot e^{i(\gamma \xi + \delta')}.$$

Bildet man mit (16) in Analogie zu Gl. (8a) für das Austrittsstadium der Analyse den verallgemeinerten Fourierkoeffizienten, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a(x, q) + i\, b(x, q) = \frac{1}{p} \int_q^{p+l} f(t-p)\, e^{i[(x-\alpha)t - xq + \alpha p + \beta]}\, \mathrm{d}\, t \\ + \frac{1}{p} \int_q^{p+l} f(t-p)\, e^{i[(x+\alpha) - xq - \alpha p - \beta]}\, \mathrm{d}\, t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a).$$

[2]) Z. Instrumentenkde., Bd. 62 (1942), S. 360 ff.

Das erste Integral läßt sich auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{p}\,e^{i[-xq+\alpha p+\beta]}\int_q^{p+l} f(t-p)\,e^{i(x-\alpha)t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{p}\,e^{i[-xq+\alpha p+\beta]}\left\{F(l,\,x-\alpha)\cdot e^{i[(x-\alpha)(p+l)+k]}-F(q-p,\,x-\alpha)\cdot e^{i[(x-\alpha)q+k]}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(16\mathrm{b}).$$

Ist $F(l)$ genügend klein, so kann man für (16b) folgenden Ausdruck setzen:

$$-\frac{1}{p}\,F(q-p,x-\alpha)\cdot e^{i[-\alpha q+\alpha p+\beta+k]}.$$

Hier tritt im Argument die Variable q linear mit dem Faktor $-\alpha$ auf, dies ist aber die Voraussetzung dafür, daß im Phasendiagramm für jede Versuchsfrequenz x die wahre Frequenz α als konstante Neigung zur Anzeige kommt. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $F(l)$ genügend klein wird, liegt vor, wenn $f(\xi)$ in Gl. (16) mit wachsenden positiven Werten von ξ, in genügend hoher Ordnung Null wird. Übrig bleibt dann noch eine Größenabschätzung des Störvektors, d. h. des zweiten Integrals in Gl. (16a), das von derselben Form ist wie Gl. (16b), da lediglich die Größe α mit umgekehrten Vorzeichen zu nehmen ist.

Diese Überlegungen zeigen, daß die beschriebene Analysiermethode grundsätzlich erweitert werden kann, und daß man aus dem Amplitudenverlauf der Harmonischen $x=x_n=\alpha$ grundsätzlich diejenige Funktion $f(\xi)$, welche als Aufbauteil in der zu analysierenden Registrierkurve steckt, unter verhältnismäßig allgemeinen Voraussetzungen finden kann. 497

KLEINE MITTEILUNGEN

Das Aufheizen einer Wand durch konstante Wärmestromdichten. 1. Die Lösungsmethode. Die Lösung dieser Aufgabe, die Zd. Laštovka[1]) zeichnerisch behandelt hat, gelingt rechnerisch nach dem Summenansatz dadurch, daß die Beharrungstemperatur als lineare Funktion der Zeit angenommen wird, deren Koeffizienten Polynome 3. bzw. 1. Grades der Raumkoordinate sind. Der konstante Summand in der Beharrungstemperatur und die Amplituden in der Ausgleichstemperatur werden als Fourierkoeffizienten bestimmt.

2. Formulierung der Aufgabe. Für die Wärmeleitung gilt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=a\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}.$$

Die Wanddicke wird mit δ bezeichnet. Randbedingungen:

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0}=q,\qquad \lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta}=q.$$

Anfangsbedingung: $(\vartheta)_{t=0}=0$.

3. Berechnung eines partikulären Integrals. Da die Wand durch beide Begrenzungsebenen ständig aufgeheizt und keine Wärme abgegeben wird, muß auch die Beharrungstemperatur im Laufe der Zeit wachsen. Die einfachste Annahme ist die, daß die Beharrungstemperatur eine lineare Funktion der Zeit ist, deren Koeffizienten zunächst beliebige Funktionen der Raumkoordinate sind:

$$\vartheta_p=k_0(x)+k_1(x)\,t\quad\ldots\ldots\quad(1).$$

Dieser Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$k_1\equiv a\left(\frac{\mathrm{d}^2k_0}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^2k_1}{\mathrm{d}x^2}\,t\right).$$

Da die linke Seite dieser Identität von der Zeit unabhängig ist, muß

$$\frac{\mathrm{d}^2k_1}{\mathrm{d}x^2}=0,$$

also der Koeffizient k_1 eine lineare Funktion der Raumkoordinate sein. Dann ist nach der Identität $\frac{\mathrm{d}^2k_0}{\mathrm{d}x^2}$ eine lineare Funktion, also k_0 ein Polynom 3. Grades der Raumkoordinate. Damit wird aus der Annahme (1)

$$\vartheta_p=k_{00}+k_{10}x+k_{20}x^2+k_{30}x^3+(k_{01}+k_{11}x)\,t.$$

Dieses Polynom wird in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$k_{01}+k_{11}x\equiv a\,(2\,k_{20}+6\,k_{30}\,x).$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$k_{01}=2\,a\,k_{20},\qquad k_{11}=6\,a\,k_{30}.$$

Diese Werte werden in das Polynom eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_p=k_{00}+k_{10}x+k_{20}x^2+k_{30}x^3\\+2\,a\,(k_{20}+3\,k_{30}\,x)\,t\end{aligned}\right\}.\quad(2).$$

Dieses Polynom wird in die Randbedingungen eingesetzt:

$$k_{10}+6\,a\,k_{30}\,t\equiv-\frac{q}{\lambda},$$

$$k_{10}+2\,\delta\,k_{20}+3\,\delta^2\,k_{30}+6\,a\,k_{30}\,t\equiv\frac{q}{\lambda}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$k_{10}=-\frac{q}{\lambda},\qquad k_{30}=0,\qquad k_{20}=\frac{q}{\lambda\,\delta}.$$

Diese Werte werden in Gl. (2) eingesetzt:

$$\vartheta_p=k_{00}+\frac{q}{\lambda}\left(-x+\frac{x^2}{\delta}+2\,\frac{a}{\delta}\,t\right).$$

[1]) Zd. Laštovka: Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1942), S. 262 bis 263.

4. Berechnung des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung und der Randbedingungen ohne Störungssummanden. Der Bernoullische Produkt- und d'Alembertsche Exponentialansatz

$$\vartheta_0 = e^{-a k^2 t}(A \sin k x + B \cos k x)$$

wird in die Randbedingungen ohne Störungssummanden eingesetzt:

$$A = 0, \qquad \sin k \delta = 0.$$

Daher ist die Ausgleichstemperatur

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{\delta}\right)^2 t} \cos \frac{n \pi x}{\delta}.$$

5. Erfüllung der Anfangsbedingung. Die Temperatur

$$\vartheta = k_{00} + \frac{q}{\lambda}\left(-x + \frac{x^2}{\delta} + 2\frac{a}{\delta} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{\delta}\right)^2 t} \cos \frac{n \pi x}{\delta}$$

wird in die Anfangsbedingung eingesetzt:

$$k_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n \pi x}{\delta} = \frac{q}{\lambda}\left(x - \frac{x^2}{\delta}\right).$$

Mit der Orthogonalität folgt

$$k_{00} = \frac{q \delta}{6 \lambda}, \qquad B_n = \frac{2q}{\lambda \delta}\int_0^{\delta}\left(x - \frac{x^2}{\delta}\right)\cos \frac{n \pi x}{\delta}\, dx$$

$$= \frac{2q}{\lambda \delta}\left\{-(-1)^n\left(\frac{\delta}{n\pi}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{n\pi}\right)^2\right\}.$$

6. Ergebnis.

$$\vartheta = \frac{q}{\lambda}\left\{\frac{\delta}{6} - x + \frac{x^2}{\delta} + 2\frac{a}{\delta} t - \frac{4\delta}{\pi^2}\sum_{n=2,4,6,\ldots}\frac{1}{n^2} e^{-a\left(\frac{n\pi}{\delta}\right)^2 t} \cos \frac{n \pi x}{\delta}\right\}.$$

Die Beharrungstemperatur

$$\vartheta_p = \frac{q}{\lambda}\left\{\frac{\delta}{6} - x + \frac{x^2}{\delta} + 2\frac{a}{\delta} t\right\}$$

wird durch die Ordinaten einer Parabel gegeben, deren Minimum in der Mitte liegt, und die mit konstanter Geschwindigkeit wachsen. Die Oberflächentemperatur ist

$$(\vartheta)_{x=0 \text{ oder } \delta} = \frac{q}{\lambda}\left\{\frac{\delta}{6} + 2\frac{a}{\delta} t - \frac{4\delta}{\pi^2}\sum_{n=2,4,6,\ldots}\frac{1}{n^2} e^{-a\left(\frac{n\pi}{\delta}\right)^2 t}\right\}.$$

7. Beispiel. Im Fall einer Ziegelwand von der Dicke 0,38 m, der Wärmeleitfähigkeit 0,75 $\frac{\text{kcal}}{\text{m h Grad}}$, der spezifischen Wärme 0,22 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg Grad}}$ und dem spezifischen Gewicht 1 705 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ist die konstante Geschwindigkeit, mit der die Ordinaten anwachsen,

$$\frac{2q}{c\gamma\delta} = \frac{2q}{0{,}22 \cdot 1\,705 \cdot 0{,}38}\frac{\text{m}^2\,\text{Grad}}{\text{kcal}} = 0{,}014\; 0\tfrac{4}{3}\, q\, \frac{\text{m}^2\,\text{Grad}}{\text{kcal}},$$

und die größte Zeitkonstante

$$\frac{\delta^2}{4\pi^2 a} = \frac{375{,}1 \cdot 0{,}38^2}{3\pi^2}\,\text{h} = 1\,\text{h}\,49\,\text{m}\,4\tfrac{7}{5}\,\text{s}.$$

8. Lösung nach der Operatorenmethode. Die partielle Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung geht durch die Laplacesche Integraltransformation

$$\bar{\vartheta} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\vartheta\, dt \qquad \Re e(s) > 0$$

in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$s\,\bar{\vartheta} = a\frac{d^2\bar{\vartheta}}{dx^2}$$

über. Deren allgemeines Integral ist

$$\bar{\vartheta} = K_1 \mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\, x + K_2 \mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\, x.$$

Die transformierten Randbedingungen

$$-\lambda\left(\frac{d\,\bar{\vartheta}}{dx}\right)_{x=0} = \frac{q}{s} \qquad \lambda\left(\frac{d\,\bar{\vartheta}}{dx}\right)_{x=\delta} = \frac{q}{s}$$

werden durch die transformierte Temperatur

$$\bar{\vartheta} = \frac{q}{\lambda s}\sqrt{\frac{a}{s}}\,\frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\left(x - \frac{\delta}{2}\right)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2}}$$

erfüllt. Die Temperatur wird nach der Riemann-Mellinschen Umkehrformel

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{ts}\,\bar{\vartheta}\, ds$$

berechnet; hierin muß der Integrationsweg so gewählt werden, daß die Pole der transformierten Temperatur links vom Integrationswege liegen.

$$\vartheta = \frac{q}{2\pi i \lambda}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\frac{e^{ts}}{s}\sqrt{\frac{a}{s}}\,\frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\left(x - \frac{\delta}{2}\right)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2}}\, ds.$$

Die Pole der transformierten Temperatur liegen in den Punkten $s = 0$ und $s = -j^2\frac{\pi^2 a}{\delta^2}$. Daher wird als Integrationsweg die Gerade $s = \sigma > 0$ gewählt. Dieser Integrationsweg wird zunächst durch 2 Punkte symmetrisch zur reellen Achse begrenzt. Diese beiden Punkte werden durch einen Bogen des Kreises miteinander verbunden, dessen

Mittelpunkt der 0-Punkt ist. Gewählt wird der Bogen, für dessen Punkte $\Re(s) \leqq \sigma$ ist. Auf diesem Kreisbogen ist

$$|e^{ts}| \leqq e^{t\sigma}.$$

Die Polarkoordinaten der Integrationsvariablen werden mit r und φ bezeichnet.

$$\left|\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)\right|$$

$$=\left[\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\sin^2\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)\right]^{1/2}$$

$$\left|\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\frac{\delta}{2}\right|$$

$$=\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}-\cos^2\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}.$$

Wird der Bruch

$$\frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\frac{\delta}{2}}$$

durch

$$\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}$$

gekürzt, so ist der absolute Betrag des Zählers $\leqq 1$ und der des Nenners

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}}.$$

Läßt man den Kreisbogenhalbmesser die Folge $(2n-1)^2\pi^2\frac{a}{\delta^2}$ durchlaufen, so ist

$$\cos^2\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}=\cos^2(2n-1)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\leqq\frac{1}{2}$$

in einem gewissen Intervall mit dem Mittelpunkte $\varphi=\pi$. Die untere Grenze φ_n dieses Intervalls ist durch die im 1. Quadranten liegende Wurzel $\frac{\varphi_n}{2}$ der Gleichung

$$\sin\frac{\varphi_n}{2}=\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}$$

gegeben. In jenem Intervall $\varphi_n \leqq \varphi \leqq 2\pi-\varphi_n$ ist

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}}\geqq\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Außerhalb jenes Intervalles ist

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}}$$

$$\geqq\sqrt{1-\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\delta}{2}}}$$

$$\geqq\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\varphi_n}{2}\frac{\delta}{2}$$

$$=\mathfrak{Tg}(2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_n}{2}}$$

$$=\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{\pi}{4}\left[(2n-1)\pi-\frac{\pi}{4}\right]}\geqq\mathfrak{Tg}\frac{\sqrt{3}\pi}{4}.$$

Daher geht das Integral über den Kreisbogen nach 0. Mithin kann das Integral über die Strecke durch das Integral über den Kreisbogen zu einem Integral über eine geschlossene Kurve ergänzt werden. Da der Integrand eine eindeutige Funktion der Integrationsvariablen ist, kann das Integral über die geschlossene Kurve nach dem Residuensatz ausgewertet werden. Um das Residuum für den Pol $s=0$ zu bestimmen, werden die Exponentialfunktion und die Hyperbelfunktionen nach Potenzen der Integrationsvariablen entwickelt.

$$\frac{e^{ts}}{s}\sqrt{\frac{a}{s}}\frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\frac{\delta}{2}}$$

$$=\frac{2a}{\delta s^2}[1+ts+\cdots]\frac{1+\frac{1}{2}\frac{s}{a}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)^2+\cdots}{1+\frac{1}{6}\frac{s}{a}\frac{\delta^2}{4}+\cdots}$$

$$=\frac{2a}{\delta s^2}[1+ts+\cdots]\left[1+\frac{1}{2}\frac{s}{a}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)^2+\cdots\right]$$

$$\left[1-\frac{1}{6}\frac{s}{a}\frac{\delta^2}{4}\cdots\right].$$

Das Residuum für den Pol $s=0$ ist

$$2\frac{a}{\delta}t+\frac{x^2}{\delta}-x+\frac{\delta}{6}.$$

Für die Pole $s=-j^2\pi^2\frac{a}{\delta^2}$ sind die Residuen

$$e^{-j^2\pi^2\frac{at}{\delta^2}}\frac{\cos j\frac{\pi}{\delta}\left(x-\frac{\delta}{2}\right)}{\cos j\frac{\pi}{\delta}\frac{\delta}{2}}4\frac{a}{\delta}\left(-\frac{1}{j^2\pi^2 a}\right)$$

$$=-\frac{4}{j^2\pi^2}\delta e^{-j^2\pi^2\frac{at}{\delta^2}}\cos\frac{j\pi x}{\delta}.$$

Hannover. Konrad Ludwig. 495

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany.
Copyright 1943 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

Mitteilungen aus den Forschungsanstalten des Gutehoffnungshütte-Konzerns

Vom laufenden Band 10 liegen bisher vor:

Heft 1. Februar 1943. DIN A 4, 24 S. mit 47 Bildern. Brosch. 2,70 RM.

Aus dem Inhalt:

Die Eigenschaften der gewöhnlichen Thomasstähle und ihre Verbesserung durch die Beruhigung mit Silizium und Aluminium. Von H. Hauttmann, Gutehoffnungshütte, Oberhausen.

Die Bestimmung des Wasserstoffgehaltes von Dieselkraftstoffen mit Hilfe ihrer Verbrennungswärme. Von G. Vorberg VDI, MAN, Werk Augsburg.

Dynamische Dehnungsmessungen. Von E. Lehr, MAN, Werk Augsburg.

Heft 2. April 1943. DIN A 4, 16 S. mit 22 Bildern. Brosch. 1,80 RM.

Aus dem Inhalt:

Schäden an Läufern von Turbogassaugern. Von R. Thomann, Gutehoffnungshütte Sterkrade.

Die Schraubenerzeugung unter dem Gesichtspunkt neuzeitlicher Werkstoff-Forschung. Von J. Billigmann, Eisenwerk Nürnberg.

Heft 3. Juni 1943. DIN A 4, 18 S. mit 22 Bildern. Brosch. 2,05 RM.

Aus dem Inhalt:

Erfahrungen bei der Umstellung von MAN-Diesellastkraftwagen auf den Gasbetrieb. Von G. Rothmann VDI, MAN, Werk Nürnberg.

Die Ableitung der Fahrgeschwindigkeit bei Kreisbogen ohne Übergangsbogen und bei Gleisknicken aus dem Ruckwert des deckungsgleichen Übergangsbogens. Von J. Uebing, Gutehoffnungshütte. Sterkrade.

Heft 4. September 1943. DIN A 4, 22 S. mit 32 Bildern. Brosch. 2,45 RM.

Aus dem Inhalt:

Spannungsfreiglühen elektrisch geschweißter Träger aus Baustahl St 52. Von C. M. Bohny und H. Busch, Gutehoffnungshütte, Sterkrade.

Über die Beanspruchung der Fahrbahn von Unterflanschlaufkatzen. Von H. Ernst VDI, MAN. Werk Nürnberg.

Heft 5. Dezember 1943. DIN A 4, 16 S. mit 13 Bildern. Brosch. 1,80 RM.

Aus dem Inhalt:

Versuche mit sauerstoffangereichertem Wind bei eisenreichen und eisenarmen Erzmöllern. Von W. Lennings. Gutehoffnungshütte, Oberhausen.

Die Ausgestaltung einer Universalprüfmaschine (Zerreißmaschine) für die besonderen Anforderungen der statischen Dehnungsmessungen. Von H. Brätsch und A. Skiba. MAN. Werk Augsburg.

Bezug durch jede Buchhandlung!

Vertrieb:

VDI-VERLAG / GMBH / BERLIN NW 7

Verantwortlich für den Textteil: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Verlagsleiter: Erich Weiher VDI, Berlin NW 7. — Verantwortlich für den Anzeigenteil: Peter Valerius VDI, Berlin NW 21. — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

XUM

Wichtige neue VDI-Regeln

VDI-Kältemaschinenregeln

Absorptions-Kältemaschinen VDI 1006

Aufgestellt von der Arbeitsgemeinschaft Kältetechnik des VDI. DIN A 4, 22 Seiten mit 9 Bildern, 3 Diagrammen und einer Zahlentafel. 1943. Broschiert 3,50 RM, für VDI-Mitgl. 3,15 RM.

VDI-Durchfluß-Meßregeln

DIN 1952. 5. Auflage. **VDI-Regeln für die Durchflußmessung mit genormten Düsen, Blenden und Venturidüsen.**

Aufgestellt vom VDI-Strömungsmesser-Ausschuß. DIN A 4, 44 Seiten und 14 Arbeitsblätter mit 24 Bildern und 5 Zahlentafeln im Text. 1944. Broschiert 5,— RM, für VDI-Mitglieder 4,50 RM.

Bezug durch jede Buchhandlung!

VDI-VERLAG / GMBH / BERLIN NW 7

A. Bezugsbedingungen: Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt ½jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **18.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

NUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Anschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise Satzspiegel der 1/1 Seite 171/250 mm.
1/1 Seite 160.— RM., 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102373, Prag 77329, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin C 2, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8¼ bis 17 Uhr, Sonnabend 8¼ bis 12³⁰ Uhr.

XUM

XUM